



UNIVERSIDAD FINIS TERRAE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS DE LA FAMILIA
MAGÍSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**LA REFLEXIÓN Y EL MODELAMIENTO DE UNA FUNCIÓN EN
ESTUDIANTES DE II AÑO MEDIO**

PAOLA RAMÍREZ GONZÁLEZ

Tesis presentada a la Facultad de Educación y Ciencias de la Familia para optar al grado de
Magíster en Educación Matemática

Profesor Guía: María de la Luz Matte Berg - Floto

Santiago, Chile

2013

A mi querido esposo, Rodolfo.

Mis agradecimientos a mi profesora guía.

INDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1	
Problema de investigación	3
Justificación:	4
Objetivos	6
CAPÍTULO 2 MARCO TEORICO Y ANTECEDENTES	
La reflexión en el proceso de enseñanza aprendizaje.	7
Modelamiento como estrategia metodológica.	12
Epistemología del concepto de función	15
Marco teórico matemático.....	16
Metodología y resultados del test de aplicación	18
CAPÍTULO 3	
Propuesta didáctica.....	21
Desarrollo de la propuesta didáctica	23
CONCLUSIONES	84
BIBLIOGRAFÍA	87
ANEXOS	90

INTRODUCCIÓN

El concepto de función, es uno de los temas más profundos en el estudio de la matemática, ya lo han demostrado desde varios siglos atrás algunos matemáticos como lo son Bernoulli y Euler (Siglo XVIII) precursores desde sus inicios. A su vez, la función ha sido una herramienta fundamental para demostrar diferentes descubrimientos matemáticos

El conocimiento de función, es fundamental ante la posibilidad de permitir modelar diferentes situaciones, desde lo cotidiano hasta lo abstracto. Es por esto que conocer y comprender el concepto función permitirá profundizar en el desarrollo de la habilidad de modelamiento matemático.

En Chile, según las nuevas bases curriculares, es un concepto que se trabaja desde los inicios de la edad escolar del niño (a partir de los 6 años) y que a su vez se va presentando de forma gradual a medida que se aumenta los niveles de escolaridad, es decir, si a los 6 años el alumno debe ordenar patrones, posteriormente a los 13 años deberá modelar una función, para que finalmente poder evaluar e inferir por medio de ellas. La prueba de selección universitaria (PSU) dedica aproximadamente un 48% de sus preguntas al eje que incluye funciones, por lo cual se puede deducir el reconocimiento de éste concepto en el estudio escolar como pieza importante para un nuevo estudio superior. Sin embargo, aunque en Chile se le dé una relevancia y se va presentando de forma gradual en los distintos años de escolaridad, es aún un contenido que resulta aún árido en su comprensión total, cómo lo demuestran las distintas evaluaciones internacionales, tales como Programme International of Student Assessment (PISA) o Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) en donde los resultados que se obtienen en esa área son casi nulo en términos de porcentaje.

Las variables que influyen en la reflexión de dicho concepto pueden ser diversas, desde el conocimiento propio del profesor, como también el enfoque de los

programas nacionales de estudios en funciones o bien el razonamiento que realiza el propio alumno según lo que recibió como parte de su proceso de enseñanza y aprendizaje.

Esta investigación tratará sobre el razonamiento que puede hacer el alumno, una vez entregado el conocimiento. El objetivo es saber cómo reflexionan los alumnos de 15 años el concepto de función, para posteriormente entregar una propuesta metodológica basada en el modelamiento matemático y la teoría de situaciones didácticas.

CAPÍTULO 1 INVESTIGACIÓN

Problema de investigación

El problema de investigación se gestó primeramente en el desarrollo de clases que involucraba el concepto de función, al notar que, existía un gran número de alumnos que presentaba dificultad para su comprensión. Posteriormente a esto, se investigó sobre la cantidad de respuestas acertadas en dicho concepto, la cual no era favorable ni a nivel de éste grupo de alumnos, junto con ello se realizó una comparación con las pruebas (internacionales o nacionales) que constantemente se toman ya sea TIMSS, PISA o Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE).

Ante esta situación surgieron variadas preguntas, las cuáles finalmente se centraron en cómo los alumnos de Segundo medio en un contexto determinado tienen desarrollada la capacidad de reflexionar sobre los conceptos matemáticos. Es decir, los alumnos ¿son capaces de profundizar en el concepto?, ¿pueden relacionarlo en diferentes contextos?, ¿logran hacer interpretaciones propias e inferir de ello?.

Para **reflexionar**, primero es necesario **comprender** el concepto, según Halford (1995, p.57)) “La esencia de comprender un concepto es poseer una representación mental o modelo mental que verdaderamente refleje la estructura de este concepto. [...] comprender el número es tener un modelo mental de él que incluya todas las relaciones esenciales de los números, al menos en el dominio donde el concepto es utilizado.” Además para que exista dicha reflexión es importante hacer que el conocimiento esté asociado con la realidad, tal como lo plantea Rita Borromeo en el modelamiento matemático y por ende la comprensión es parte de ello, como lo plantea Morín (1994, p. 157) "la comprensión del conocimiento que aprehende todo aquello de lo que podemos hacernos una representación concreta, o que podamos captar de manera inmediata por analogía". Entonces ¿cómo comprendemos y reflexionamos el concepto de función? si el estudiante no realiza una representación concreta de él, para el caso de función, un gráfico, un modelamiento lineal, interpretación de una tabla, entre muchas otras.

Pregunta: ¿Los alumnos de segundo medio en un contexto determinado tienen desarrollada la capacidad de reflexionar sobre los conceptos matemáticos de función?

Problema:

El concepto de función, aun cuando es un tema que se trata constantemente ya sea de forma formal cómo la función con su fórmula y gráfica o de manera informal, no escribiendo que es una función propiamente tal, pero si estudiándola, como por ejemplo en el concepto de proporcionalidad, se observa que presenta problemas al momento de su comprensión, la "metáfora de máquina", resulta a veces muy pertinente para el inicio del concepto, sin embargo, al seguir avanzando en el estudio de éste, se visualiza dificultad en la comprensión de ella y por tanto en la reflexión de la misma, ya que los estudiantes no relacionan el tema, en sus diversos contextos, se vuelve un concepto rutinario que consiste en evaluar un dato, pero no se construye mayor conocimiento que permita una verdadera apropiación del mismo.

Justificación:

La matemática es un concepto que a veces resulta algo árido a los estudiantes, muchas veces nos preguntamos cómo podemos lograr que el alumno realmente aprenda. Existen diferentes aristas que involucran el proceso de enseñanza y distintos enfoques en los que se puede llevar a cabo un estudio. El presente estudio va a dirigido a observar que sucede en el proceso de reflexión de las alumnas, después de haber enseñado un contenido, para esta investigación, el concepto de función. Luego de tener dicho estudio, se pretende entregar una propuesta didáctica que permita desarrollar el proceso de reflexión de dichos estudiantes.

El concepto de función, propiamente tal, de acuerdo al Ministerio de Educación, parte inicialmente en el nivel de Octavo básico, continuando después en los niveles de enseñanza media. El contenido de función es un concepto de forma transversal, porque se

trata en toda en la enseñanza media ya sea cómo concepto puro inicialmente y después con sus diferentes aplicaciones.

La reflexión en matemática, es una habilidad, que permite cumplir con uno de los propósitos curriculares de Chile tal como lo es "Argumentar respecto a las variaciones que se producen en la representación gráfica de funciones" (Ministerio de Educación Chile, 2011, p. 25) El Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSSi) 2011 es el más reciente de la serie de proyectos de la International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEAii) para medir los logros de los estudiantes en esa área en el ámbito internacional, y según ello nos muestran que: " En Chile, entre 2003 y 2011 ha disminuido significativamente el porcentaje de estudiantes de 8° básico que queda fuera de los niveles de Matemática; por el contrario, ha aumentado el porcentaje que alcanza al menos el nivel Bajo y los niveles superiores. El 34% de los estudiantes solo alcanza el nivel bajo, es decir, solo tienen conocimientos elementales de los números y solo hacen cálculos simples. El 18% se encuentra en el nivel intermedio, es decir, 1 de cada 5 estudiantes, puede aplicar conocimientos básicos a una variedad de situaciones. Finalmente sólo un 4% de los estudiantes chilenos alcanza el nivel alto, es decir, son capaces de aplicar su conocimiento y comprensión a una variedad de situaciones" (Resultados TIMSS 2011, p26)

Según lo anteriormente descrito se puede apreciar que, los estudiantes en matemáticas alcanzan un nivel bajo e inicial, no logrando una reflexión ante el tema y trayendo como consecuencia que no exista conjeturas ante algún problema matemático o comprensión del mismo.

Ante esta situación se propone que, al estudiar la reflexión de los alumnos en matemática, ayudará a tener una perspectiva de cómo los estudiantes reflexionan en el concepto de función y una vez teniendo esto presente, se pueden tomar decisiones para lograr un mejor aprendizaje significativo.

OBJETIVO GENERAL

Estudiar la capacidad que tienen de reflexionarlos estudiantes, después de haber enseñado un concepto matemático, en éste caso, funciones. De acuerdo a ello se realizará una propuesta metodológica.

Objetivos específicos

- Determinar el nivel de reflexión en el concepto de función, haciendo un análisis cualitativo de éste.
- Crear una propuesta metodológica que pretende abordar la reflexión y modelamiento del concepto de función.

CAPÍTULO 2 MARCO TEORICO Y ANTECEDENTES

La reflexión en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Primeramente, ¿Qué es la reflexión? Y segundo ¿Qué es la reflexión en un proceso de aprendizaje?. La primera de ellas, reflexión, quizás resulte más fácil definir, pues es una palabra o concepto que es de uso más cotidiano, puesto que, constantemente lo estamos usando para tomar decisiones, tan simples como cruzar la calle hasta emitir la opinión de una noticia que ha salido en el diario. Es por ello que al ser la reflexión un concepto que constantemente se está utilizando quizás resulte más abordable, en efecto, para la real academia española se define cómo: pensar de manera atenta y detenida sobre algo". De hecho es posible hablar que una sociedad avanza en la medida que se reflexiona sobre los actos o decisiones que constantemente se están realizando, ya sea a nivel micro o macro de personas.

A demás al reflexionar como plantea Branch y Paranjape, (2002, p. 1187) se "lleva al crecimiento del individuo moralmente, en lo personal, psicológicamente y emocionalmente, así como también en su proceso cognitivo.

Sin embargo, aun cuando se pueda tener claridad sobre el concepto de reflexión y aun cuando sea una acción que se utiliza constantemente en la vida diaria, cabe preguntarse nuestra segunda pregunta ¿Qué es la reflexión en un proceso de aprendizaje?.

Para contestar esta última pregunta podríamos situarnos en el siguiente contexto, los estudiantes al enseñarles un conocimiento nuevo se encuentran dentro de cierta situación (didáctica o adidáctica) provocada por el profesor en donde se desea que él aprenda cierto conocimiento, sin embargo, aun cuando exista dicha intencionalidad cabe preguntarse ¿cómo se adquiere conocimiento? ¿Cómo se va cambiando de nivel para poder profundizar en la construcción del mismo? ¿En qué momento logro dicha reflexión del

aprendizaje?, estas y muchas otras preguntas pueden irse derivando en la reflexión del aprendizaje y son muchos los autores que han trabajado en ello.

A continuación se mostrará alguno de ellos y la definición que presentan para reflexión el proceso de aprendizaje.

Uno de los primeros filósofos que relacionó la reflexión con el proceso educativo fue Dewey, el definía la acción reflexiva como la acción que supone una consideración activa, persistente y cuidadosa de toda creencia o práctica a la luz de los fundamentos que la sostienen y de las consecuencias a las que conduce. La acción reflexiva constituye también un proceso más amplio que el de solución lógica y racional de problemas. La reflexión implica intuición emoción y pasión: no es algo que pueda acotarse de manera precisas como han tratado de hacer algunos, y enseñarse como un conjunto de técnicas para uso de los maestros. (Dewey, citado en *El maestro como profesional reflexivo*, Kenneth M. Zeichner, 1994). Además, en "*Howwethink*", sostiene que el pensamiento reflexivo, es el examen que realizamos sobre las creencias que tenemos, la evidencia que lo sustentan y las conclusiones que nos permiten llegar a él. Agrega además que un componente crucial en el desarrollo del pensamiento reflexivo es la adopción de una actitud basada en el juicio y el conocimiento de varios métodos de búsqueda, o de evidencias que sostengas u objeten lo primera idea que se venga en mente. (PrabhaBetne en *Reflection as a learning tool in mathematics*, p 95).

A su vez la reflexión, va más allá de una habilidad, también proporciona a través de las transformaciones simbólicas un medio para unir el conocimiento con los contextos sociales, así como también para la traducción de un tipo de experiencia (por ejemplo académica) a otra (por ejemplo lo práctico). (Bene Prava et al.)

Para Wheatley y Sigel la reflexión en matemática la describe como un proceso de "distanciarse de la acción de hacer matemáticas". Wheatley agrega que las personas que reflexionan tienen mayor control sobre su pensamiento y pueden decidir cuál de los varios

caminos tomar, es por ello que no es suficiente para los estudiantes terminar su tarea, sino que debemos animarlos a reflexionar sobre su actividad. (p 96)

En el mismo sentido, Race, Phil (2002) plantea que la acción de reflexionar es lo que ayuda a dar forma a lo que hemos aprendido, por qué hemos aprendido y cómo ese crecimiento particular de aprendizaje se llevó a cabo. Por otro lado, la reflexión permite ver el panorama más amplio del crecimiento de aprendizaje.

En la teoría de APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) según lo que señala Trigueros, María (2005, p.5) la construcción del conocimiento pasa por tres etapas básicas, acción, proceso y objeto; En donde lo fundamental es la construcción del conocimiento. Pero, ¿Qué es la construcción del conocimiento, sin reflexión?.

Para Trigueros, María (2005, p. 31) la abstracción reflexiva se comprende como la reflexión que hace un alumno sobre el sentido que tienen las acciones que se realizan sobre un objeto matemático y cuál es el efecto que tiene sobre él.

La acción (en la teoría de APOE) se define como una transformación del conocimiento. A modo de ejemplo, el concepto de función se traspa del lenguaje natural al lenguaje algebraico, así cuando el alumno repite la acción y es capaz de reflexionar sobre ella, puede ser interiorizada dentro de un proceso de aprendizaje.

Según Ramos (2011 citado en John Dewey 1910) dice que la reflexión es un proceso que nos acompaña desde educadores tales como Platón, Aristóteles entre otros y se inicia el concepto de reflexión como la acción impulsiva basada en ensayo y error, la acción rutinaria, basada en la autoridad y la tradición, y la acción reflexiva, basada en el ensayo y error, que busca soluciones lógicas y racionales a problemas.

Según Vergnaud, Gérard (1981) el conocimiento racional es operatorio o no es tal conocimiento, entonces a veces se ve enfrentado a situaciones que requiere un tiempo de reflexión y de exploración, para dar lugar a una respuesta dado cierto problema.

Según Korthagen y Verkuyl “Una persona reflexiona cuando está mirando hacia atrás sobre sus experiencias y/o conocimiento y se dedica a establecer por sí mismo una nueva estructura o evaluación de esas experiencias y/o conocimiento” (Korthagen y Verkuyl, 1987, p.4)

Para Dubinsky(1991a, 1991b) es la abstracción reflexiva, en el sentido de un proceso que permite al individuo, a partir de las acciones sobre objetos, inferir sus propiedades o las relaciones entre objetos en un cierto nivel de pensamiento.

Para Rachel Ong en "The role of reflection in student learning", el trabajo reflexivo puede ayudar al crecimiento del valor en la experiencia del aprendizaje, facilitando de ese modo, dicho proceso. (p1)

La reflexión es indicador de aprendizaje profundo (Biggs 1999 en King 2002), y no de un aprendizaje superficial, a veces, los estudiantes ven la reflexión o el enseñar a reflexionar como una interrupción a su trabajo, pues ellos generalmente desean el contenido concreto, lo rápido, la fórmula para llegar a el área de un cilindro por ejemplo, a veces, demuestran poco interés en el porqué, quedándose generalmente en el cómo se hace.

Esto implica una falta de reflexión en el aprendizaje, puesto que éste último no es un proceso de acumular información, sino que al contrario, el objetivo es ir relacionando los diferentes temas y junto con ello abordarlos de manera tal que se pueda ir avanzando en él. Esto se logrará siempre y cuando se logre un proceso de aprendizaje reflexivo.

En la reflexión se puede observar cómo está íntimamente involucrados el proceso de aprendizaje y la representación de éste. La reflexión aquí, implica dar atención a los detalles, es decir, no es la gráfica de la función lineal una recta, porque el procesador geométrico lo muestra, sino porque los puntos se relacionan de manera tal que la generan y además se considera el teorema que por dos puntos pasa una recta.

La reflexión, además permite ir hacia un propósito, procesamiento de la información que conduce a un resultado útil. Reflexión también puede referirse a los procesos mentales que van más allá de simplemente pensar y recordando información. Por lo tanto, la reflexión sería implicar una forma de procesamiento mental con un propósito y/o un resultado anticipado que se aplica a relativamente a una situación no estructurada, para los que no hay una solución obvia. Esto sugiere una estrecha asociación y participación en el aprendizaje y la representación de éste "(Luna, 1999:4, citado en Rachel Ong).

Entonces, como se puede observar la reflexión es una acción o proceso mental que acompaña a el conocimiento y la construcción del mismo, poniendo al estudiante en una situación de protagonista en donde él puede realizar inferencias de lo que se le está enseñando y dependiendo de éstas, podrá construir un conocimiento. No va relacionado con un desarrollo cotidiano y automatizado en el aprendizaje, sino que al contrario, permite hacer un proceso más profundo de lo aprendido, logrando avanzar en otros niveles, que permitirán un aprendizaje más constructivo. Por lo tanto en la medida que se realicen reflexiones más hondas es posible avanzar en dicho conocimiento.

O bien, como lo plantea Ewell, sabiendo que es un proceso mental que, al estar siendo aplicado al acto de aprender, reta a los estudiantes a utilizar su pensamiento crítico para examinar la información presentada, cuestionar su validez, y obtener conclusiones sobre la base de las ideas resultantes. Este proceso en curso permite a los estudiantes poder reducir las posibles soluciones y, finalmente, llegar a una conclusión. El resultado de esta lucha es lograr una mejor comprensión del concepto. Sin la reflexión, el aprendizaje termina "muy por debajo de la reorganización de pensar que el aprendizaje" profunda "requiere" (Ewell, 1997, p.9).

Es decir, situaciones de aprendizaje eficaces requieren tiempo para pensar. Los estudiantes reflexionan sobre sí mismos como estudiantes cuando evalúan los procesos de pensamiento que utiliza para determinar qué estrategias funcionaron mejor, desechando

aquellas que no resultan, un estudiante que está reflexionando cometerá menos errores, porque estará atento a la situación planteada y observará diferentes variables que influyen matemáticamente en lo planteado.

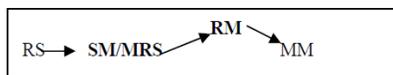
Tal como lo demuestra un ejemplo de Cowan, John (1998) "Un estudiante está reflexionando cuando el nota que hay algo diferente sobre el caso que está considerando, en comparación con los ejemplos que ella tiene en su clase; y cuando el estudiante identifica cuál es la diferencia, el sabría qué hacer en ello.

EL MODELAMIENTO MATEMÁTICO COMO ESTRATEGIA METODOLÓGICA PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DE REFLEXIÓN EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LAS FUNCIONES.

El modelamiento matemático es un concepto en el cuál se ha avanzado en los últimos años en Chile como parte fundamental de la matemática, tanto así, que las nuevas bases curriculares 2012 del Ministerio de Educación lo plantean dentro de las habilidades a desarrollar por los alumnos en el área de matemática. Propone lo siguiente: " El objetivo de esta habilidad es lograr que el estudiante construya una versión simplificada y abstracta de un sistema, usualmente más complejo, pero que capture los patrones claves y lo exprese mediante lenguaje matemático. Por medio del modelamiento matemático, los alumnos aprenden a usar una variedad de representaciones de datos y a seleccionar y aplicar métodos matemáticos apropiados y herramientas para resolver problemas del mundo real." (Ministerio de Educación, 2013, p.19)

Pero, ¿qué es el modelamiento matemático? Para Borromeo,Rita(2009, p. 45- 58) es el proceso de trasladar la matemática en ambas direcciones, es decir, desde el mundo real al matemático o viceversa. Ella propone que existen diferentes ciclos de modelamiento, es decir, diferentes maneras de trasladar las situaciones reales a la matemática:

1er. Ciclo de modelamiento:



En dónde RS: representa la situación real

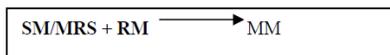
SM/MRS: situación modelo o representación mental de la situación

RM: modelo real

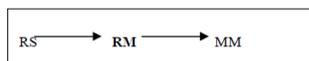
MM: modelo matemático

Es decir, de la situación real el alumno pasará a una representación mental de la situación, para luego plantear un modelo real que lo llevará al modelo matemático.

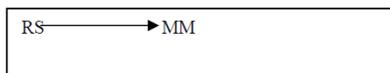
2do. Ciclo de modelamiento: Mezcla entre la situación modelo y su representación mental, uniendo a ello el modelo real para así llegar al modelamiento matemático.



3er. Ciclo de modelamiento: No existe distinción entre la situación modelo o su representación mental.

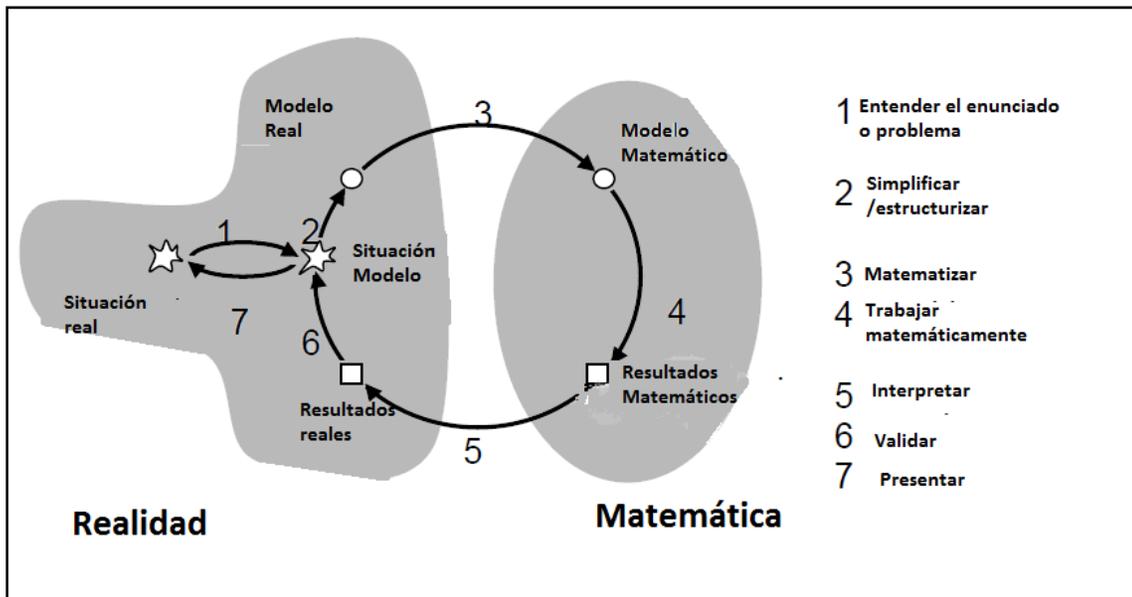


4to. Ciclo de modelamiento: Es pasar directamente desde la situación real al modelo matemático, sin tener distinción entre la situación modelo o la representación mental de ella.



(Borromeo Ferri, Rita, 2006, p.86)

Según Blum/Leiss (2005 citado en Rita Borromeo Ferri 2006, p88) existe otro tipo de modelamiento, tal como se muestra en la siguiente gráfica, en dónde se puede apreciar que éste es un ciclo en donde se interactúan diferentes fases para modelar.



Para María Aravena D. & Carlos Caamaño E. plantea que: "el diseño de actividades basado en la modelización de situaciones reales y de las ciencias, "transformándose en una vía prometedora tanto para enfrentar las dificultades y deficiencias como para elevar la calidad de los aprendizajes matemáticos" (Aravena 2002: 66)." (p.2)

Por otro lado, citado en Didáctica de la matemática en Chile: " Ricardo Cantoral, Francisco Cordero y otros proponentes de la Socioepistemología(Cf. Cordero, 2001) nos invitan a *resignificar* los contenidos matemáticos, focalizándose en las *práctica sociales* que los generan y de modo de obtener un conocimiento *funcional* de la Matemática –uno que no se restringe a aplicar algunos conocimientos dispersos."

En resumen, el concepto de función se encuentra relacionado con el modelamiento que pueda realizar un alumno, éste se puede dar dentro de un contexto propiamente matemático o bien dentro de situaciones reales, éstas últimas resultan más atractivas a la hora de aprender, porque se están relacionando con un mundo cotidiano y no como un objeto aislado, permitiendo con ello la reflexión sobre el mismo.

Entonces, según lo anteriormente descrito se propondrá diversas situaciones basadas en el modelamiento matemático, pero en el que se consideró la teoría de GuyBrousseau para estructurar (en su mayoría) dichas situaciones de forma didácticas y en donde, de forma transversal, se podrá apreciar las fases de modelamiento de Blum/Leiss.

Cabe hacer presente que la situación didáctica, se base en distintas fases que debe tener el modelo que realizará el alumno para construir su conocimiento, ellas son:

- **Formulación del problema:** Es el momento que se le entrega al alumno la situación problema a resolver, y en donde él interactúa (sin la ayuda del profesor) creando diferentes propuestas para resolverlo.
- **Validación:** El alumno comparte con sus compañeros las distintas respuestas u opciones ante el problema dado y verifica si es correcto o no lo que el mismo está planteando.
- **Institucionalización:** Es el momento de la clase en donde el profesor por medio de las distintas respuestas de los alumno formaliza el contenido matemático.

Epistemología del concepto de función.

El concepto de función, es un tema que se encuentra desde los inicios de nuestros tiempos partiendo desde las grandes civilizaciones como lo fueron los Griegos, por ejemplo en el descubrimiento del Teorema de Pitágoras, en donde para cada cateto se obtiene la hipotenusa, dando una generalización de éste, los babilónicos buscaban regularidades al observar y anotar los fenómenos naturales como el movimiento de los astros.

Ya para el siglo XVIII, Bernoulli y Euler, son los personajes que ponen en la historia la función como una expresión analítica, siendo Bernoulli el que creará la expresión fx y su evolución es con Euler nombrándola $f(x)$. Es con éste último, donde aparece el Análisis de Matemática, disciplina enfocada a estudiar los procesos infinitos, tal como él lo plantea

"una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, como quiera que lo sea, de dicha cantidad y de números o cantidades constantes..., y las cantidades sobre las que opera: ...Una cantidad variable es una cantidad indeterminada o, si se quiere, una cantidad universal que comprende todos los valores determinados..."
(Euler, 1748)

En el siglo XIX los trabajos de Cauchy (cálculo infinitesimal), Lobachevsky (Geometría no Euclidea), Dirichlet (función densidad y función no continua en todos sus puntos) y Riemann (cálculo integral) entre muchos más toman a la función como la base de sus trabajos, de los cuáles estudiamos hasta el día de hoy.

Marco teórico matemático

Definición de función:

Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Una función $f: X \rightarrow Y$ es una regla en donde a cada elemento de x de X le asigna un elemento $f(x)$ de Y , que llamamos imagen de x por f . Es decir,

$$(\forall x \in X)(\exists! y \in Y)(y = f(x))$$

Si $A \subset X$,

Definimos:

$f(A) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ para algún } x \in A\}$. Al conjunto $f(A)$ se nombra como imagen o recorrido de la función.

Otra forma de escribir el concepto es que una función es un trio que depende de tres conceptos que son su dominio, su codominio y la misma función, si en la función f existe un par (a,b) y otro (a,c) necesariamente $b = c$, en donde b representa la imagen de a . Nótese que el dominio de una función son todos los elementos de X , el codominio son todos los elementos de Y en el recorrido son los $f(A)$ en Y .

Existen muchas propiedades que se desprenden del concepto de función y que su uso permite la demostración de diversas propiedades o bien aplicaciones. Aquí nos enfocaremos a mostrar alguna de ellas, para que el lector tenga cierta noción.

▪ Sea $f: X \rightarrow Y$, y sean A y B subconjuntos de X . Entonces

i) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

ii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

iii) Si $A \subset B$ entonces $f(A) \subset f(B)$

iv) $f(\emptyset) = \emptyset$

▪ **Gráfica de una función**

El gráfico de una función f es el conjunto:

$$\{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

Entonces, para que un subconjunto A esté contenido de $X \times Y$ y sea el gráfico de una función es necesario y suficiente que cada x en X le corresponda un único y en Y tal que el par (x, y) esté en A .

▪ **Pre- imagen de una función**

Sea $y \in Y$, la pre-imagen o la imagen inversa de y según f es el conjunto

$$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\},$$

Si $B \subset Y$ entonces

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

- **Función Inyectiva:**

Si para $x, y \in X$ siendo $x \neq y$ entonces $f(x) \neq f(y)$

- **Función Sobreyectiva (Epiyectiva):**

Si $f(X) = Y$

Es decir, si todo elemento del codominio es imagen de algún elemento del dominio.

METODOLOGÍA PARA EL ESTUDIO DE CASO

Para realizar la investigación, primero se hará un estudio de caso, en donde se aplicará un instrumento de carácter cualitativo que tiene por objetivo analizar la situación actual de reflexión de las alumnas una vez enseñado el concepto de función. El estudio de caso, se diseñó según los siguientes reactivos propuestos por Lysette Félix (2009, p. 75) y adaptados para esta situación.

A1 Reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica;

A2 Determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente.

A3 Determinar los valores de la variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente.

A4 Reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación.

A5 Interpretar la variable simbólica como una relación general que puede asumir cualquier valor.

A6 Simbolizar una relación funcional de acuerdo de acuerdo a una gráfica

A7 Simbolizar una relación funcional según el análisis de los datos de un problema.

A8 Identificar si la relación presentada corresponde al concepto de función.

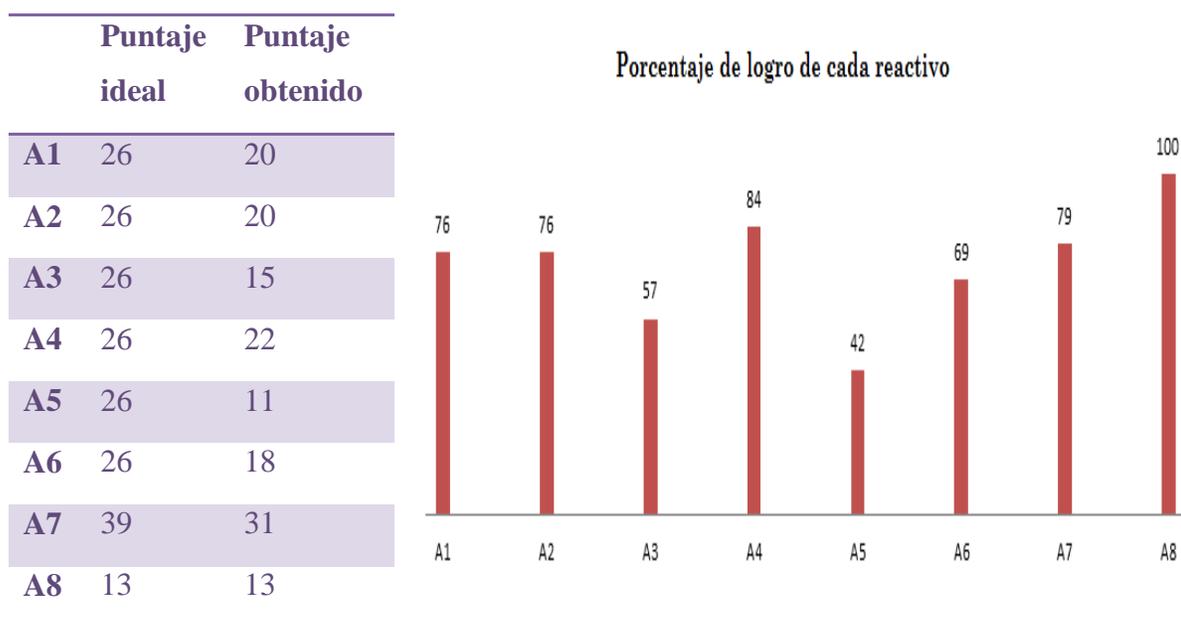
En el anexo 1 se adjunta el tipo de preguntas del cuestionario

Resultados de test aplicado

El test se aplicó a un grupo de 14 estudiantes, cuyas edades fluctúan entre los 15 y los 16 años. La forma de aplicar el test, fue en un período de 40 minutos, las estudiantes estaban dentro de un contexto escolar cotidiano (sala de clases).

Dentro de los resultados generales del test aplicado, se puede observar que el promedio de preguntas correctas es de un 72%, sin embargo, al hacer el análisis por cada pregunta sucede lo siguiente.

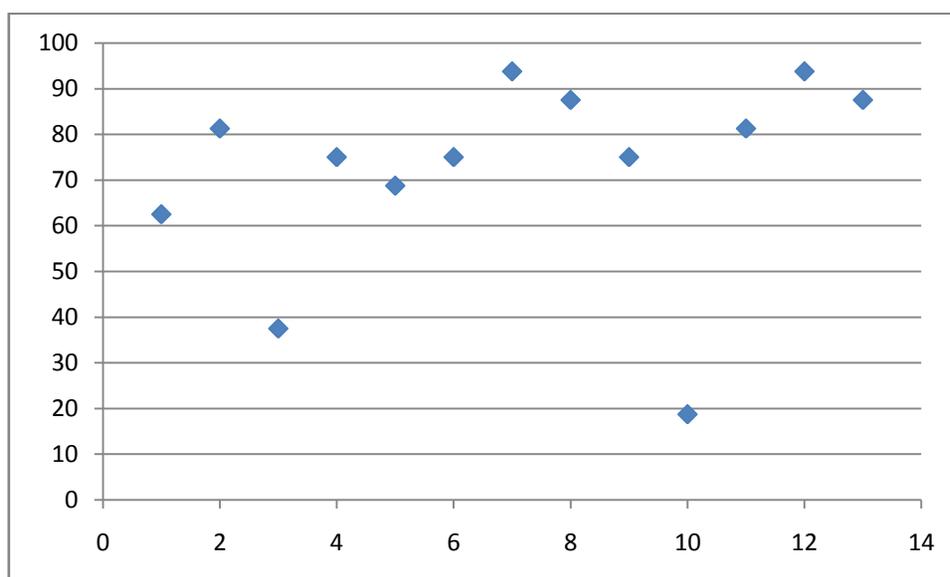
Gráfico de respuestas correctas por indicador



Como se aprecia en la gráfica el indicador más débil fue A5 " Interpretar la variable simbólica como una relación general que puede asumir cualquier valor", a partir de ello se puede deducir que se observa una ausencia de comprensión con respecto a lo que significa el concepto de función involucrado en un problema, y de ese modo generar su interpretación.

El indicador más alto fue A8: "Identificar si la relación presentada corresponde al concepto de función.", es decir, las estudiantes si son capaces de identificar si la relación gráfica presentada corresponde al concepto de función, a su vez esto se relaciona con el indicador A4: "Reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación", la cual también obtuvo uno de los más altos porcentajes de respuestas correctas.

Dispersión del total de respuestas correctas de las estudiantes



Es posible apreciar que en general las respuestas de las estudiantes siguen una conducta constante, salvo dos de ellas que puede ser dos resultados despreciables para términos de la investigación.

Esta relación constante permite observar que es una muestra homogénea y que por medio de ella es posible ajustarlas a un modelo lineal. Además se puede observar que no existió gran separación entre sus puntajes.

CAPÍTULO 3 PROPUESTA DIDÁCTICA

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA ABORDAR LA REFLEXIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN.

Para poder abordar el modelamiento matemático, es importante considerar la reflexión como eje principal de éste, pues es con ella que se logran tomar decisiones, prestar atención a los detalles, procesar la información de manera óptima de modo que lleve al estudiante a un resultado que le permita construir conocimiento y sea útil para él.

Es decir, se espera que por medio de situaciones que involucren modelamiento, se pueda llevar a cabo el proceso de reflexión y desarrollar procesos mentales que van más allá de memorizar o recordar una fórmula, que si bien es cierto, son necesarias, pero no fundamentales para la construcción y comprensión de un conocimiento.

El modelamiento permitirá llegar a la reflexión de modo tal que sea posible para el estudiante, por ejemplo anticiparse a un resultado de cierta situación, es decir, el podrá predecir e inferir que es lo que está sucediendo.

En las actividades creadas se van interrelacionando entre sí, pues el objetivo es poner al estudiante en diferentes situaciones de modo tal que le permita ir analizando de diferentes formas el concepto de función, no es de extrañar observar un gráfico de una función cualquiera, previo a trabajar el concepto de gráfica de función, pues se trata de poner al estudiante en situaciones en donde él pueda ir más allá en su conocimiento de forma constructiva.

El procedimiento de la propuesta didáctica se considerará un tiempo de 29 horas, en las cuáles se realizarán diversas actividades graduadas, desde el inicio del concepto de función hasta diferentes representaciones de funciones. Todo esto basado en lo anteriormente descrito.

Las actividades, en su mayoría, trabajarán el modelamiento matemático, sin embargo, existirán algunas de carácter complementario, que tiene como fin, apoyar la construcción del aprendizaje, por lo tanto, estas no necesariamente se marcarán dentro de un contexto cotidiano, sino que más bien habitual, como por ejemplo: *"escriba todos los números cuya suma es siempre 2"*.

Además existirá un blog el cuál simulará la plataforma "moodle"¹ en el sentido de apoyar el análisis continuo de situaciones asociadas al concepto de función mediante la retroalimentación constante entre los propios estudiantes y el profesor.

¹Para la creación de blog y la carga de archivos mediante dropbox ver anexo.

Desarrollo de la propuesta didáctica.

Programa de la propuesta

Actividad	Tiempo en horas	Descripción
1.	3	Plano cartesiano y funciones. Buscar en diarios o revistas situaciones en donde ellos describan una relación numérica entre las variables.
2.	2	Inicio de función.
3.	2	Análisis de situaciones que involucran el concepto de función (blog).
4.	2	Gráfica de situaciones que se representan por funciones.
5.	4	Taller de funciones.
6.	2	Análisis de gráficos (blog). Preguntas abiertas.
7.	2	Gráfica de distintas funciones por medio de un procesador geométrico.
8.	2	Concepto de Función lineal y modelamiento.
9.	2	Grafica de función lineal. Traslación de la gráfica de la función lineal y generación de la función afín.
10.	2	Evaluación intermedia, procesador gráfico.
11.	2	Función Afín y modelamiento.
12.	2	Comprensión de imágenes y pre-imágenes .
13.	2	Creación de funciones en contextos conocidos (blog).
14.	2	Evaluación final.

Propuesta 1: "Plano cartesiano"

Tiempo estimado: 3 horas

Objetivo: Escribir coordenadas en el plano que describen relaciones en la que puedan o no involucrar el concepto de función. El modelamiento permite acercar a los alumnos a situaciones conocidas y a partir de ello generar conocimiento matemático, es por ello que se han diseñado los siguientes reactores para la propuesta 1.

Objetivo específicos

La pregunta 1) tiene como fin enfrentar al alumno a un plano cartesiano y escribir coordenadas en él, pero no serán cualquier coordenada, sino que están condicionadas a crear un rectángulo. Una vez escrito las coordenadas en el plano cartesiano, se espera que identifiquen y clasifiquen (horizontal - vertical) las coordenadas para poder luego completar una tabla que permitirá la observación y análisis de la forma de estas coordenadas, pudiendo escribir una "fórmula", de ésta situación.

La pregunta 2) se desea poner a el alumno en una situación de carácter cotidiano como es la compra de un lápiz, se espera que generen la forma de una recta al escribir los puntos en el plano, y que al escribir la fórmula se establezcan con las condiciones de dependencia de la cantidad de lápices, según el dinero que se paga por la venta de cada uno.

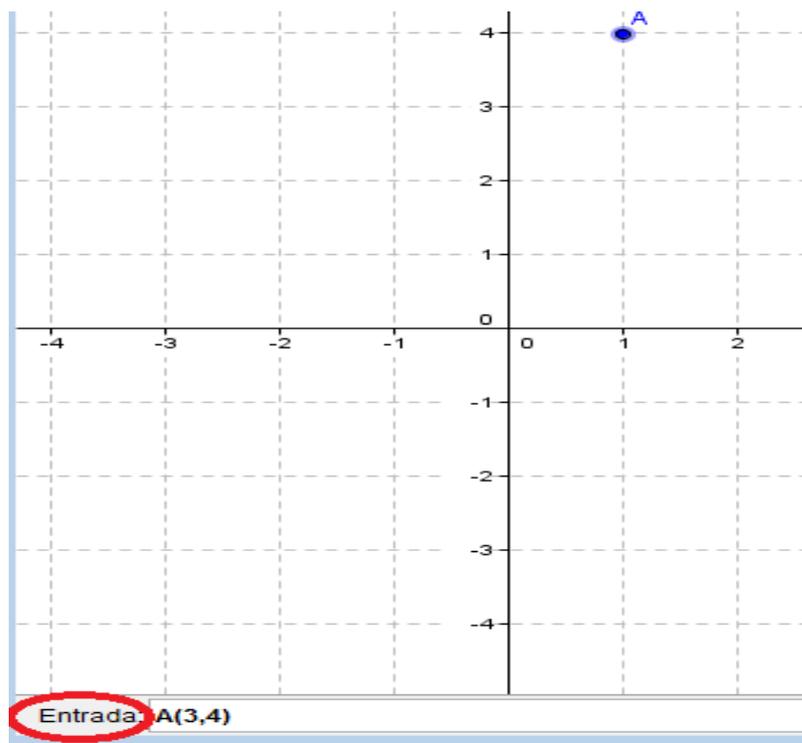
En ambas actividades y cómo lo propone el modelamiento, el trabajo colaborativo se produce, ya que queda abierta las preguntas de escribir los puntos en el plano cartesiano y las fórmula, en estas últimas podría existir consenso general en qué las "fórmulas" descritas depende de x , y esta es una variable independiente.

Cabe mencionar que no se trabaja con el nombre de función inmediatamente, porque se desea que los alumnos se familiaricen primero con el concepto, desde otra perspectiva y que se vaya construyendo a medida que van pasando las lecciones de clase.

La pregunta 3) plantea a los alumnos identificar relaciones numéricas en diarios o revistas con el fin de acercar a los alumnos al concepto de función.

Actividad:

Las siguientes actividades se desarrollarán en el programa Geogebra. Para escribir los puntos en el plano cartesiano lo debe hacer según la casilla de entrada del programa. Guíese por el ejemplo.



1) Escriba en la casilla de **entrada** 10 puntos en el plano cartesiano, de modo tal que forme un rectángulo. Guíese por el ejemplo:

b) Complete la siguiente tabla de acuerdo a lo trabajado en el software.

Coordenadas horizontales del rectángulo.	
Coordenadas verticales del rectángulo	

Observando la tabla que usted completo:

b.1) ¿Qué tienen en común las coordenadas horizontales?

b.2) ¿Qué tienen en común las coordenadas verticales?

b.3) Escriba una "fórmula" que identifique las coordenadas horizontales y las coordenadas verticales del rectángulo que usted creo.

2) El ingreso que se percibe por la venta de lápices es de \$150 por cada uno. Grafique 6 puntos en el plano cartesiano que represente la venta de lápices.

3) Busque e Investigue en diarios o revistas relaciones numéricas. Identifique las variables involucradas.

Análisis a priori de la situación:

Según conocimientos disciplinarios previos.

Puede ocurrir que los alumnos no ocupen el comando de entrada del programa, eso afectaría considerablemente el trabajo, pues no se involucrarían los alumnos con la escritura (x,y) de coordenadas en el plano cartesiano, además podría afectar la identificación de los puntos y las preguntas (b) de análisis que van asociadas a descubrir la "fórmula" de los puntos del rectángulo. Así como también que en cómo existe un ejemplo de carácter explicativo del software, utilicen todos los alumnos ese mismo punto.

Según habilidades y aprendizaje en desarrollo.

Es importante hacer notar que no todos los alumnos tendrán el mismo rectángulo, porque este dependerá de los puntos que han escogido. Para la escritura de la fórmula que involucra las coordenadas horizontales, pueden escribir $y = k$, en donde k es un número entero (esto es sólo por la cuadrícula del software) o bien (x,k) . Ambas respuestas se consideran correctas. En el caso de las coordenadas verticales, es análogo, pueden escribir $x = k$ o bien (k,y) y también como ocurrió anteriormente se considera ambas correctas.

Para la gráfica de ingreso, pueden escribir distintos puntos, pero cómo la indicación dice 6 puntos en el plano cartesiano, se debe considerar que probablemente los alumnos escriban a partir del 1 hasta el número 6, es decir, considerarán la venta de los primeros 6 lápices. Es importante graduar el eje y del programa, porque si no lo hacen el punto que escriban no aparecerá y será un problema para la actividad. Dentro de las fórmulas que pueden escribir son $y = 150x$ o con lenguaje natural *el ingreso de los lápices depende de la venta, es decir, se paga 150 por cada lápiz.*

Propuesta 2: Inicio de función

Tiempo estimado: 2 horas

Objetivo: Relacionar y analizar situaciones que impliquen el concepto de función.

Objetivo específicos

La propuesta número dos se divide en seis partes.

La primera de ellas es continuación de la sesión anterior que trataba sobre la investigación por parte de los alumnos, la cual tiene como objetivo familiarizar a los alumnos con el concepto de función, tal como plantea Ricardo Cantoral: "*resignificarlos contenidos matemáticos, focalizándose en las *práctica sociales* que los generan y de modo de obtener un conocimiento *funcional* de la Matemática –uno que no se restringe a aplicar algunos conocimientos dispersos.*". Es decir hay que concretizar el contenido en situaciones propias del alumno, que permitan el conocimiento y análisis de estas.

La segunda de ella, es continuar con el concepto de modelación, pero observándolos en situaciones concretas ya realizadas, pero que son parte de lo cotidiano. Se presentan distintos tipos de gráficos, para permitir cambiar de lenguaje, pero que permitirá focalizarse que el fondo es el mismo, solo que cambió la forma de presentarlo. Además como parte de la comprensión de dicho problema, he iniciado el concepto de función, se pide que identifiquen cuál sería la función involucrada, la variable independiente y la variable dependiente, así de comprender efectivamente cuál es el concepto de función.

Para la parte tres, y teniendo presente que el contenido de proporcionalidad fue tratado en niveles anteriores según currículum nacional, se trata el concepto de función por medio de la observación de gráfico, se aumenta el nivel ya que se pide la fórmula que involucra el problema.

En la parte cuatro, se pide que observen el gráfico y determinan si corresponde a una función, se desea hacer la transferencia entre el concepto de función y el gráfico de la misma, comprendiendo de esta manera la relación única entre una variable con otra. Para el número cinco, es una inclusión entre la relación que genera una función y su respectiva gráfica.

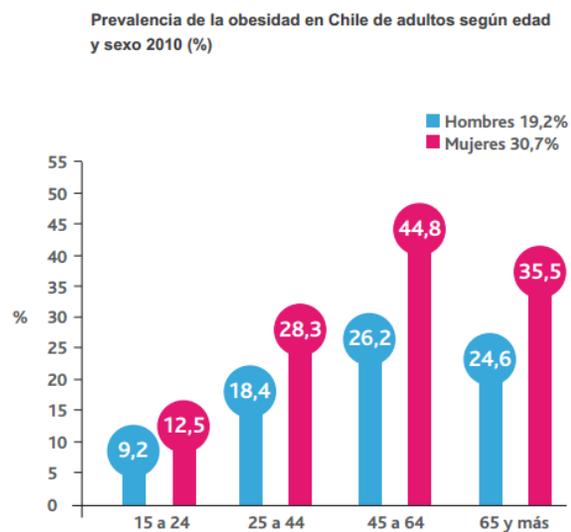
El número seis, es una resumen de la propuesta porque se le pide al alumno que cree una situación que se vea reflejado el concepto de función, además permite realizar una autoevaluación y comentar con sus pares porqué cree que lo inventado es función o no. Se pide a los alumnos que justifiquen, y esto tiene por objetivo visualizar el grado de comprensión de función para el profesor, además de enfrentar al alumno a hacer la reflexión de lo que está escribiendo, el porqué de los conceptos.

Actividad

1. Los alumnos comentan las situaciones y establecen las respectivas relaciones numéricas que observaron.

2. Lea las siguientes situaciones e identifique cuál de ellas representa el concepto de función. Identifique las variables independiente y dependiente.

a) *La obesidad en Chile ha aumentado en los últimos años, el siguiente gráfico muestra la obesidad en Chile, entre hombres y mujeres a partir de los 15 años.*



Concepto de función

Variable independiente

Variable dependiente

b) *Crecimiento poblacional*

El principal agente de crecimiento de la población son los nacimientos, y el principal agente de descenso de la población es la muerte.

Cuando el número de nacimientos es superior al número de muertes la población crece y cuando ocurre lo contrario, decrece. Cuando el número de nacimientos es igual al de muertes en una población dada su tamaño no varía, y se dice que su tasa de crecimiento es cero.

Concepto de función

Variable independiente

Variable dependiente

c) *El Índice de Masa Corporal es uno de los métodos más fiables y sencillos para saber si su peso es el adecuado. Se considera que ligeros sobrepesos (por encima de un índice 25) no son especialmente peligrosos para su salud, aunque es recomendable mantenerse siempre por debajo del citado índice. Se considera obesidad cuando el índice obtenido está por encima del 30, el cual se corresponde con un peligro real para su salud. Introduzca su peso en kilos y su estatura en metros*

Concepto de función

Variable independiente

Variable dependiente

- d) "La bicicleta representa muchas ventajas desde el punto de vista de transporte, es un modo limpio, permite hacer ejercicio, es saludable y es una alternativa (...) Desde 2005 el uso de la bicicleta ha ido creciendo a una tasa de 20% por año."

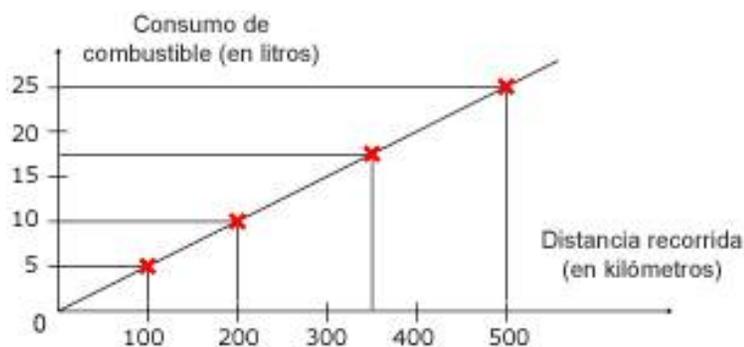
Concepto de función

Variable independiente

Variable dependiente

3. Funciones en problemas

1. Un automóvil por cada 100 km consume 5 litros de combustible, si se mantienen las mismas condiciones, responda:

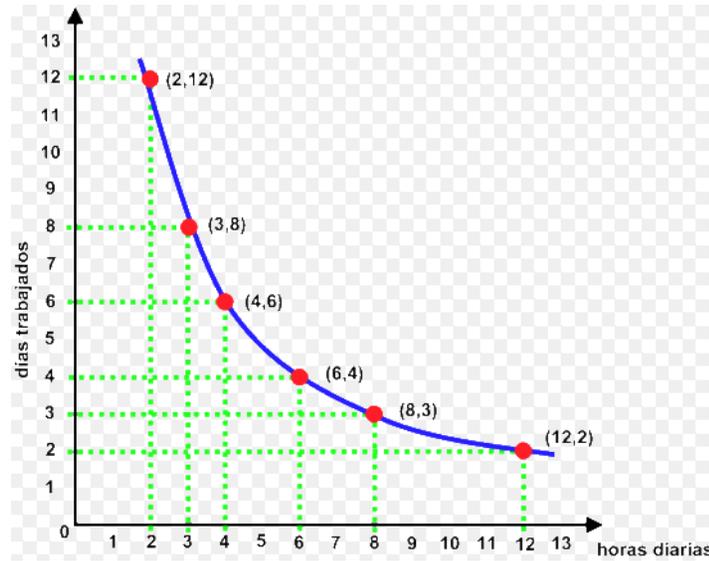


a) ¿Cuánto combustible gastó el recorrer 200 km?

b) Si éste automóvil quiere realizar un viaje de 550 kilómetros y el estanque tiene una capacidad de 40 litros de combustible, ¿Alcanzará a terminar el viaje sin ir a la bomba de bencina? Justifique.

c) Escriba la función que relaciona los kilómetros con los litros consumidos.

2. El gráfico a continuación muestra la relación que existe entre las horas trabajadas y el número de días que ocupan los trabajadores para terminar la pintura de un edificio, según ello responda:



a) ¿Cuántos días dedicarán si trabajaran 4 horas diarias?

b) Si se trabajan 12 días ¿cuántos días trabajarán?

c) Escriba la función que relaciona las horas diarias con los días trabajados.

4. Observe los siguientes gráficos y determine cuál de ellos representa una función.

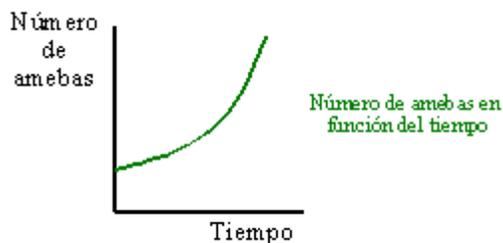
a)



b)



c)



Justificación

5. Escriba la fórmula de las siguientes relaciones y determine si son función o no.

- El perímetro de un cuadrado de lado x .
- El área de un cuadrado de lado x .
- La suma de dos números cualquiera siempre es 5.
- La multiplicación de dos números siempre es 4.

Grafique dichas situaciones en su cuaderno.

6. Cree una situación en donde se esté involucrado el concepto de función. **Justifique.**

Análisis a priori de la propuesta 2

Según conocimientos disciplinarios previos

La pregunta uno dependerá de las situaciones investigadas por los alumnos, no obstante de eso, aun cuando los alumnos no presenten el concepto de función, se puede extraer el contraejemplo y preguntar porque no lo es. Además es un inicio para reforzar la idea de variable y su dependencia.

Según habilidades y aprendizaje en desarrollo

La pregunta dos el análisis de situaciones que representa el concepto de función, puede ocurrir que confundan las variables independientes o dependientes, además de no poder expresar claramente cuál es el concepto de función, ya que éste último lo pueden determinar en lenguaje natural o bien con la fórmula correspondiente.

La pregunta tres, como es basada en un contenido anterior, probablemente los alumnos dirán, que se trata de proporcionalidad directa e inversa y pueden preguntar que tiene que ver ese contenido con función, si llegase a ocurrir lo dicho es una instancia para profundizar el conocimiento. Para el caso de la proporcionalidad inversa (b) encontrar la fórmula requerirá un grado mayor de complejidad, pero es importante hacer notar que no siempre la función será la suma de algo a una variable.

La pregunta cuatro, al no tener números, eso puede producir algún error, ya que deben recurrir a la comprensión del concepto de función para determinar si efectivamente es. La pregunta cinco, al realizar el gráfico eso les permitirá visualizar cuál es función o no, sin embargo, la misma realización del gráfico, puede presentar problemas así como también la creación de la fórmula, no por no comprender el concepto de función, sino por escribir en lenguaje algebraico o gráfico. La creación de la función, para la pregunta seis, puede ocurrir que repitan la misma idea de lo anteriormente trabajado, solo cambiando nombres.

Propuesta 3: Análisis de situaciones que involucran el concepto de función.

Tiempo estimado: 2 horas

Objetivo: Analizar diversas situaciones de uso cotidiano que involucre el concepto de función.

Objetivo específicos

En el blog de funciones se sube una foto que involucra una noticia de carácter cotidiano y que permita desarrollar el concepto de función. Además se crean preguntas relacionadas con ella, que no será las únicas, ya que dependiendo de las respuestas de los alumnos pueden ir avanzando, el objetivo es crear un foro virtual que permita la discusión entre los compañeros con el fin de ir construyendo y reflexionando el concepto de función.

Las preguntas a pesar que aparecen con las letras secuenciadas, no significa que tienen que ser todas inmediatamente escritas, al contrario, se espera que los alumnos escriban, expresen sus opiniones, fomentar el diálogo virtual y luego de ello ir escribiendo las otras preguntas.

Desarrollo del Blog.

En el blog de funciones se sube la siguiente foto y se crea varias preguntas relacionadas con ella como son:



Bencinas subirían \$12 promedio; diesel lo haría en \$9

Según el informe semanal emitido por Ecosult, la bencina de tipo 93 aumentaría 1,7% (\$12), mientras que la de 97 lo haría en 1,5% (\$12), considerando el supuesto de que no "hay nuevos cambios en los parámetros del Sipco".

- a) ¿Cuál es la función que aparece en la noticia?
- b) ¿Cuál es la variable independiente y dependiente?
- c) ¿Cuál es la función ingreso de la venta de las respectivas gasolinas?
- d) ¿Cuál es la función "diferencia de precios" entre la venta de las respectivas gasolinas?
- e) ¿Cómo se establece el precio de la gasolina?

Análisis a priori:

Según conocimientos disciplinarios previos

Cómo la pregunta dice, cuál es la función que aparece en la noticia, puede suceder que interpreten la función desde la gasolina, o desde el precio en promedio de lo que subió o los porcentajes. Todas las discusiones que se creen a partir de ellas, son válidas ya que todas son funciones.

Según habilidades y aprendizaje en desarrollo.

Para la función ingreso de venta de las respectivas gasolinas, puede que escriban la función sin identificar las variables, en caso que ocurra, se aconseja hacer la contra pregunta. Pedir ejemplos a los alumnos, porque probablemente puede ocurrir que no justifiquen. Para la función diferencia de precios, lo pueden escribir inmediatamente haciendo la resta entre las gasolinas o bien por parte, en ambos casos es válido y nuevamente se genera la discusión, y por tanto la reflexión sobre lo escrito.

La pregunta cómo se establece el precio de la gasolina, pueden enviar links donde cuentan quién decide los parámetros y cuál es la diferencia entre una bomba de bencina u otra.

Propuesta 4. Gráfica de situaciones que se representan por funciones.

Tiempo estimado: 2 horas

Objetivo

Relacionar situaciones cotidianas que involucran el concepto de función, con sus respectivas gráficas.

Objetivo específicos

Visualizar la aplicación del concepto, porque a partir de ello, podemos inferir y reflexionar sobre la situación, además de ponerlo en una situación concreta.

Actividad:

Para cada una de las siguientes situaciones:

- a) Grafíquelas en su cuaderno, identificando cada eje del plano cartesiano y la forma de la función.
- b) Interprete lo que plantea el problema a medida que cambia el valor de las variables.
 1. Un auto recorre 50 kilómetros por hora en una ciudad.
 2. El ingreso por la venta de entradas a \$7.500 para ver un partido de fútbol.
 3. El volumen de un cubo varía según la medida de su lado.
 4. El costo a pagar en una cuenta telefónica, depende del cargo fijo que es \$ 1.500 y lo que se cobra por minuto que es \$10.
 5. El ingreso por la venta de productos que valen un \$15.000, pero que ahora están con un 75% de descuento.

6. La velocidad de una bicicleta es 10 km por cada media hora.
7. El interés a una tasa del 2% sobre miles de pesos.
8. Todas las posibles áreas de un rectángulo de largo 8 cm y ancho x .
9. El área de un círculo de radio r . Considere que $\pi = 3$
10. El 7% que se destina a AFP considerando sueldos en cientos de miles de pesos.

Análisis a priori

Según conocimientos disciplinares previos

Puede suceder que los estudiantes no recuerden conceptos como área de un círculo o porcentaje, si llegase a suceder esta situación es una oportunidad para comentarlo y ahondar en ello, comprendiendo que el concepto de función se presenta en diferentes situaciones.

Según habilidades y aprendizaje en desarrollo

Es posible que presente problemas en identificar las variables independientes y dependientes para la construcción de la gráfica. Los estudiantes pueden preguntarse cuál es la fórmula, o cuál es la función, sin embargo, el objetivo de esta actividad no es la "fórmula" como tal, sino que familiarizar al estudiante con el concepto de función (en su contexto) y su respectiva gráfica.

Propuesta 5.

Tiempo estimado: 4 horas

Objetivo: Investigan una situación en su entorno, ya sea una negocio, pago de cuentas, cantidad de automóviles que pasan por una intersección entre muchas más actividades, en donde puedan aplicar el concepto de modelar la función.

Objetivo específicos

Relacionar lo aprendido con su experiencia, mostrando lo investigado por medio de una exposición.

La exposición tiene como fin la retroalimentación de lo realizado versus lo aprendido en clases. Se efectuará en máximo 15 minutos, porque se desea trabajar la habilidad de síntesis y de reflexión de lo investigado.

Taller de funciones

Instrucciones:

- Piense e investigue una situación en su entorno en donde se vea aplicada el concepto de función.
- Describa el entorno donde usted investigará el concepto de función.
- Si hace un cambio en lo que estaba investigando, relate porque sucedió el cambio en términos matemáticos y justifique su otra opción, puede ocurrir que lo que esté investigando no esté involucrado el concepto de función.
- Registre todas sus observaciones numéricas para modelar el concepto de función.
- Escriba la función que modela la situación que usted investigó.
- Realice un informe detallado en donde explique la función, lo que investigó, el gráfico que la representa. Realice inferencia de la función investigada.
- Una vez que usted haya realizado el informe, en no más de 10 minutos debe realizar una exposición a sus compañeros de lo investigado y las inferencias que obtuvo de ello.

Análisis a priori

Según conocimientos disciplinarios previos.

Debido que el taller de funciones es una actividad que depende de lo que deseen investigar, es posible que los estudiantes no sepan qué o cómo investigar. Sin embargo, este no debiese ser un problema, sino que al contrario, debiese ser una oportunidad de conocimiento pues ayudará a seleccionar y reflexionar sobre el concepto de función, en donde si es aplicable, en donde no lo es.

Según habilidades y aprendizaje en desarrollo.

Es deseable que los alumnos tengan la experiencia plausible de averiguar una situación que puedan modelar por medio del concepto de una función, y así poder relacionar con lo aprendido.

El taller enfrentará al estudiante a buscar una situación que pueda modelar, tendrá que registrar y luego modelar lo que el mismo ha propuesto para dicha investigación, el orden en anotar los datos es otro factor que puede influir en la modelación.

La exposición de lo investigado puede ocurrir que no realicen mayor inferencia de la experiencia modelada. (Véase en anexo 5 la rúbrica de evaluación de esta actividad)

Propuesta 6: Análisis de gráficos

Tiempo estimado: 2 horas

Objetivo: Se presentan 3 tipos de gráficos en el blog con el fin analizar y discutir por medio de preguntas abiertas su funcionabilidad.

Objetivo específicos

Potencias la habilidad de reflexión mediante el análisis y justificación de lo descrito.

Instrucciones para el blog:

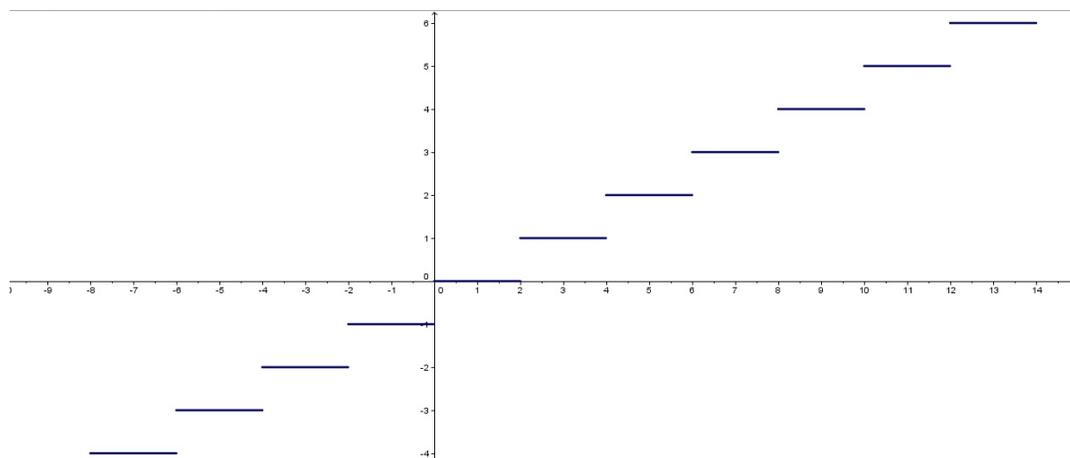
Estimados alumnos en el presente blog se pondrán distintas imágenes que tienen como fin analizar y discutir su idea respecto a lo que se plantea.

Es importante que usted justifique lo que expone, ya sea con un link o en su misma escritura.

¡Muchas gracias!

Gráfico 1

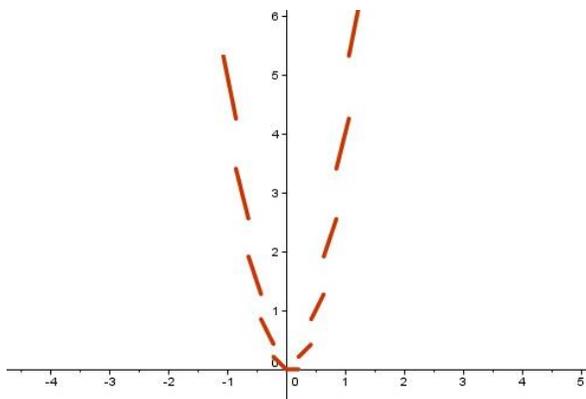
El siguiente gráfico representa la función parte entera



a) ¿Cómo se relacionan las variables x e y?

b) En qué situación de la vida diaria podría ocurrir lo que muestra el gráfico

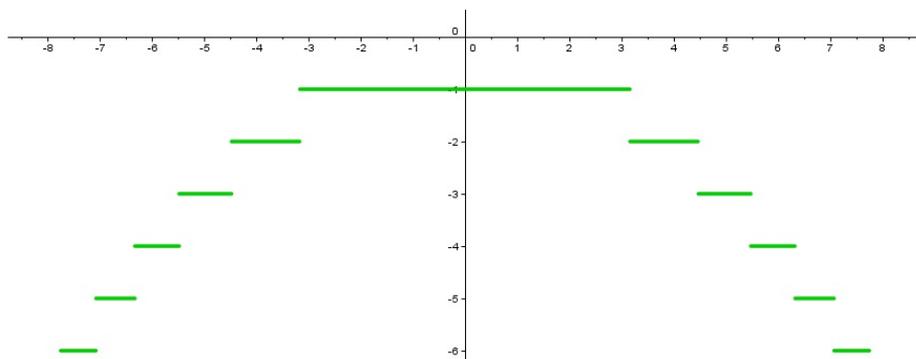
Gráfico 2



a) ¿El gráfico representa una función?

b) En qué situación de la vida diaria has visto una imagen como dicho gráfico.

Gráfico 3



a) Con sus palabras describa la relación que representa dicha gráfico.

b) ¿En qué situación de la vida diaria se representado dicho gráfico?

c) ¿Es función?

Análisis a Priori

Según conocimientos disciplinarios previos

Dado que las imágenes presentadas no son funciones que se han trabajado hasta el momento, puede suceder que los estudiantes piensen que no representan una función, sin embargo, si recuerdan la propiedad de función podrían deducir que si existe.

Según las habilidades y aprendizaje en desarrollo

El link para justificar puede ser una instancia de retroalimentación interesante, debido a que a partir de ello se pueden generar nuevas oportunidades para discutir sobre el concepto de función.

Con respecto a la pregunta que relaciona con la vida diaria, es posible que las respuestas para el gráfico 1, sea una escalera (pensando en la imagen) o bien con el parquímetro, teniendo presente el cobro por tramo. El gráfico 2, una posible respuesta sería un destello de fuegos artificiales o lanzamiento de agua desde una pileta, éste último también ocurre con el gráfico 3.

Propuesta 7: Gráfica de distintos tipos de funciones por medio de procesador geométrico.

Tiempo estimado: 2 horas

Objetivo: Grafican distintos tipos de funciones por medio de un procesador geométrico, con el fin de analizar su gráfica y establecer propiedades.

Objetivo específicos

La primera parte (tabla) tiene como fin familiarizar al estudiante con los distintos tipos de gráfica de funciones.

En la segunda parte tiene como objetivo generalizar lo anteriormente realizado.

Actividad

Mediante el procesador geométrico grafique las siguientes situaciones y complete la siguiente tabla.

$f(x) = ax$ Escriba sus ejemplos	$a > 0$.	Característica, ¿Cómo es su gráfica?
	$a < 0$	

$f(x) = a$	a un número real	
$f(x) = ax + b$	$a > 0$ y $b > 0$	
	$a > 0$ y $b < 0$	
	$a < 0$ y $b > 0$	
	$a < 0$ y $b < 0$	

Observando las gráficas realizadas y sus características, responde:

a) ¿Cuál es la diferencia entre la función $f(x) = ax$ y $f(x) = ax + b$?

- b) En la función $f(x) = ax + b$, el número b que representa en el eje y .
- c) ¿Qué sucede si $a > 0$ en la función $f(x) = ax + b$ o en la función $f(x) = ax$?
- d) ¿Qué situación de la vida diaria puede describir la función $f(x) = a$?

Análisis a priori de la situación

Según conocimientos disciplinarios previos

Debido a que la propuesta promueve respuestas variadas, que tienen el mismo fin en concepto. Puede ocurrir que en un principio el estudiante no sepa cómo abordar y escribir una función, sin embargo, esta situación es una oportunidad para el aprendizaje constructivo, ya que a partir de su experiencia podrá determinar las diferencias entre una gráfica u otra, los puntos de intersección, la forma de cada recta.

Según habilidades y aprendizajes en desarrollo

Para la pregunta: "¿Qué situación de la vida diaria puede describir la función $f(x) = a$ ", puede suceder que no puedan asociar con la realidad inmediatamente, pero preguntas tales como ¿qué significa la forma de la recta? ¿Se mantiene constante algo?, podrían facilitar y llegar a respuestas asociadas a la vida diaria.

Propuesta 8: Concepto de función lineal y modelamiento

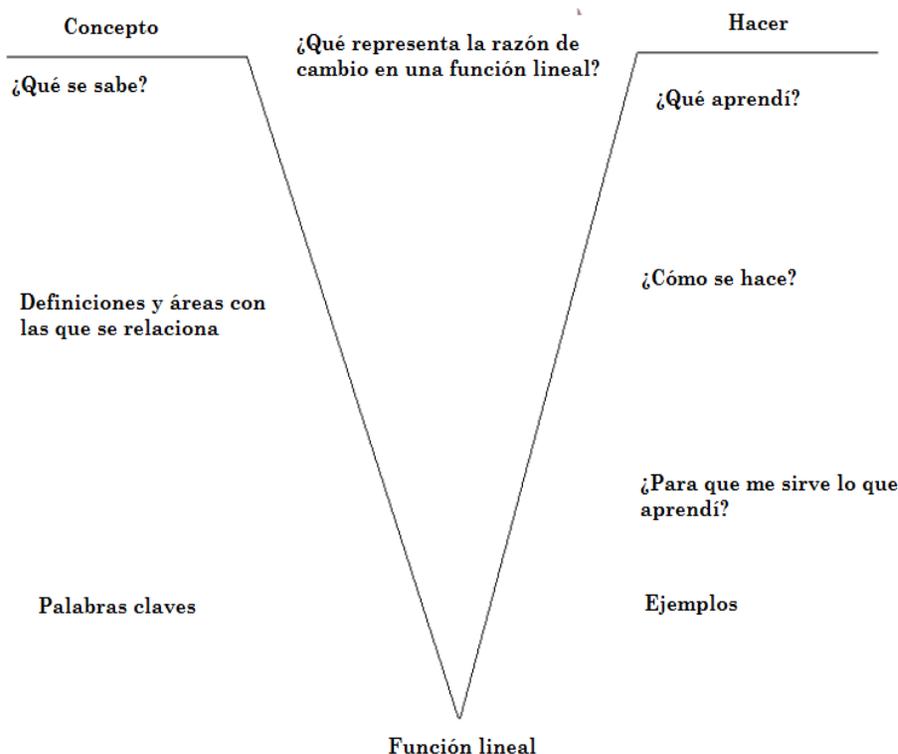
Objetivo

Realizan un diagrama de UVE de Gowin para el concepto de función lineal y modelamiento, bajo la pregunta determinante ¿Qué representa la razón de cambio en una función lineal?.

Objetivo específicos

Gowin propone que un "diagrama V es una herramienta que puede ser empleada para analizar críticamente un trabajo de investigación, así como para "extraer o desempaquetar" el conocimiento de tal forma que pueda ser empleado con fines instruccionales" (MOREIRA; 1985)

A continuación se presenta un diagrama basado en la UVE de Gowin para ser completado según la investigación que realicen los estudiantes.



Análisis a priori de la situación

Según conocimientos previos

Es posible que los estudiantes deseen hacer un trabajo de investigación de uso común, como lo es con el formato, introducción, desarrollo, conclusión.

Según habilidades y aprendizaje en desarrollo

Puesto que la UVE de Gowin es un método nuevo de investigación, puede ocurrir que no puedan abordarlo de manera positiva inicialmente. Al completar la UVE de Gowin no todos los estudiantes tendrán las mismas respuestas, pero si deben ser similares. La respuesta a la pregunta debe ir relacionada con palabras tales como pendiente, razón de cambio y comprender que dicho factor es el que modela una situación dada, por ejemplo el ingreso por concepto de venta de lápices es 300 por cada lápiz, la razón de cambio es de 300, representa la pendiente de la recta asociada a la función lineal y es el factor constante de cambio en el problema.

Propuesta 9: Grafica de función lineal. Traslación de la gráfica de la función lineal y generación de la función afín.

Tiempo estimado: 2 horas

Objetivo: Comprender que la gráfica de la función afín se genera trasladando la función lineal según un vector k . (k en los números reales, distinto de cero).

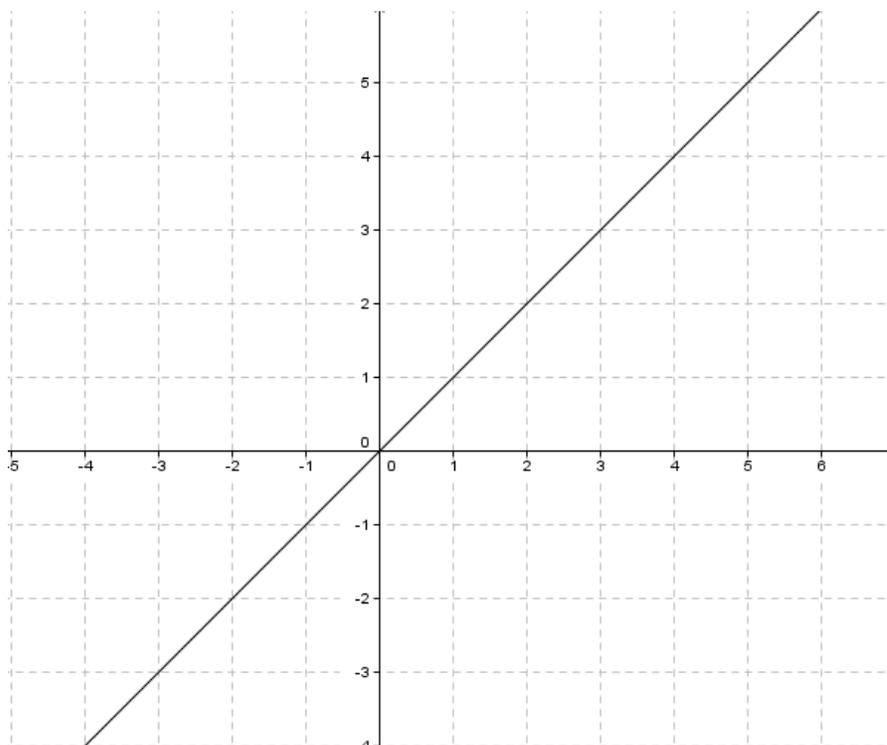
Objetivo específico

Relacionar la gráfica de la función afín, con las respectivas traslaciones de la función lineal.

Actividad

Instrucciones: Para los siguientes gráficos realícelos en el mismo plano cartesiano.

Considere la siguiente gráfica de función lineal $f(x) = x$



- a) ¿Qué sucede si su gráfica se traslada según el vector $k = 1$? ¿Cuál es la nueva gráfica?.
Representéla.
- b) ¿Qué sucede si su gráfica se traslada según el vector $k = 2$? ¿Cuál es la nueva gráfica?.
Representéla.
- c) ¿Qué sucede si su gráfica se traslada según el vector $k = -3$? ¿Cuál es la nueva gráfica?.
Representéla.
- d) Si $k > 0$. ¿En qué cuadrantes quedará representada su gráfica?
- e) ¿Cuál es el modelo de la función que es representada por la gráfica cuando k es distinto de cero?

Análisis a priori

Según conocimientos disciplinarios previos

Al realizar esta actividad se debe tener presente que al existir un factor k , puede suceder que en primera instancia los estudiantes pregunten cuál es el factor k , ante ello es bueno invitarlos a crear y utilizar cualquier número real.

Según habilidades y aprendizaje en desarrollo

A medida que se van realizando las traslaciones de la función lineal, se va creando la gráfica de la función afín, puede suceder que no se realice la relación entre la gráfica correspondiente y la representación simbólica de esta, si ocurre esta situación, se recomienda hacer un paralelo de la situación entre gráfica lineal y afín, y sus respectivas

representación simbólicas, para que de éste modo se pueda observar la conexión que existe entre la función ya sea afín o lineal, y su respectiva gráfica.

Propuesta 10: Evaluación intermedia, procesador gráfico.

Tiempo estimado: 2 horas

Objetivo: Mediante la gráfica de diferentes relaciones analizan si corresponden al concepto de función o no. Determinan dominio y recorrido mediante la gráfica de función.

Objetivo específico:

Relacionan lo descrito en la tabla con el concepto de función.

Actividad: Realice las siguientes gráficas en el programa Geogebra. Luego responda la tabla en su cuaderno

Relación	¿Es función?	Bosquejo de su gráfica	Dominio	Recorrido
$y = x$				
$y = -5$				

$y = 2x$				
$y = 0,5x$				
$y = x^2$				
$y = x^2 + y$				
$y = x^2 + y^2$				

$y = \sqrt{x}$				
$y = 2^x$				
$y = x^2 - y^2$				

Análisis a priori de la situación:

Según conocimientos disciplinarios previos

Existen muchas relaciones descritas en su lenguaje simbólico, que no son conocidas para los estudiantes, ese echo podría presentar dificultad para ellos.

Según las habilidades y aprendizaje en desarrollo

La actividad pretende que los estudiantes distingan el concepto de función, analizando por medio de la gráfica entregada (si corresponde a esta o no), es decir, el estudiante en el desarrollo de esta actividad debiese comprender que la función es aquella relación univoca, por tanto se espera que logren hacer la reflexión sobre las representaciones que si son funciones.

Con respecto al dominio o bien recorrido, al presentarse los ejes x e y en el procesador con números enteros, puede ocurrir que ellos establezcan ese tipo de número como dominio o recorrido.

Propuesta 11: Función Afín y modelamiento.

Tiempo estimado: 2 horas

Objetivo: Mediante un experimento de simulación modelan la función afín.

Objetivo específico

Reflexionar sobre el experimento y obtener conclusiones asociadas a la función afín.

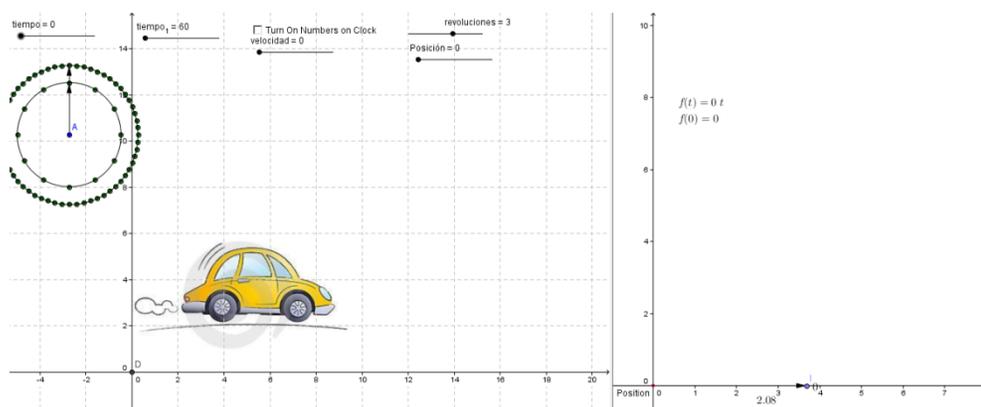
La actividad se realizará de la siguiente manera se presenta a los estudiantes la siguiente simulación de un automóvil en movimiento mediante el programa Geogebra.

Del lado izquierdo se muestra todas las acciones que puede realizar un automóvil en cuanto a su movimiento, cambio de velocidad y posición.

Del lado derecho se muestra la gráfica de la función que modela dicha situación, además si cambia de posición.

Actividad:

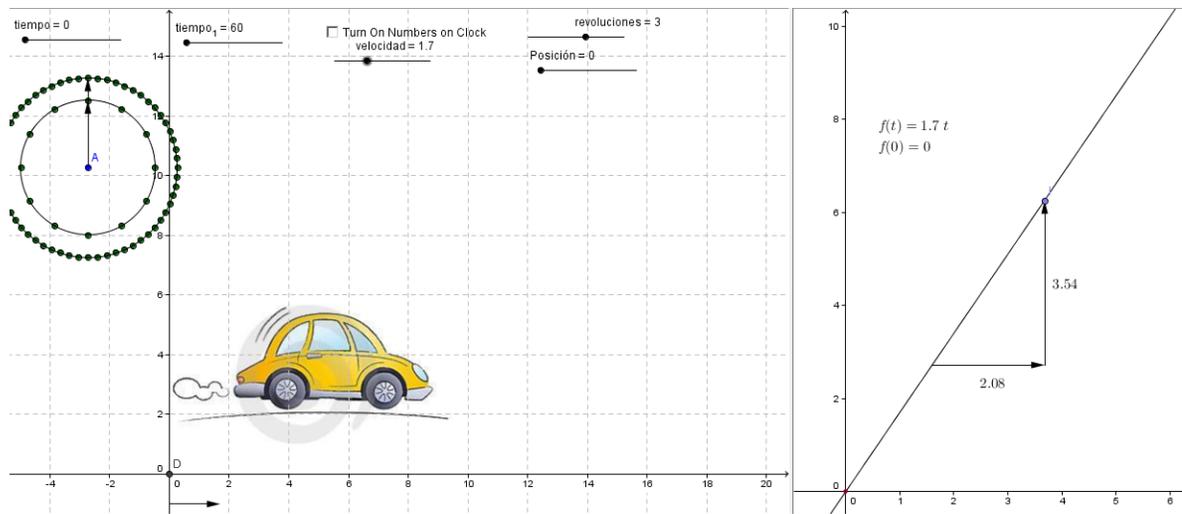
a)



El siguiente software muestra la simulación del movimiento de un automóvil.

Identifique los deslizadores que tiene, desplácelos con su mouse y observe la gráfica.

b)



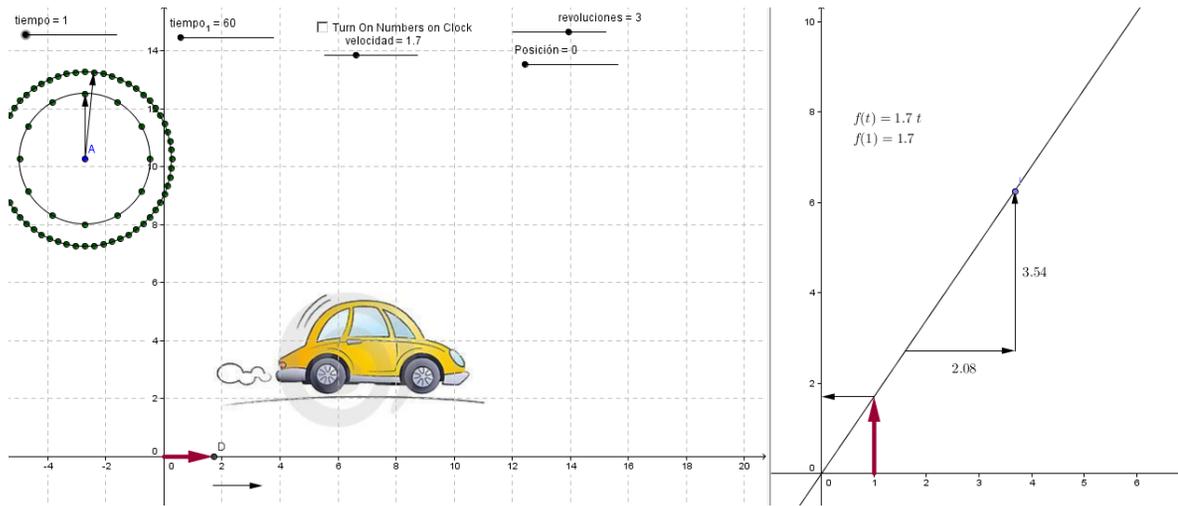
Mueva el deslizador a una velocidad de 1,7 m/s y responda:

b.1) ¿Qué representa el número 1,7 en la gráfica?

b.2) ¿Qué tipo de función es la que se construye?

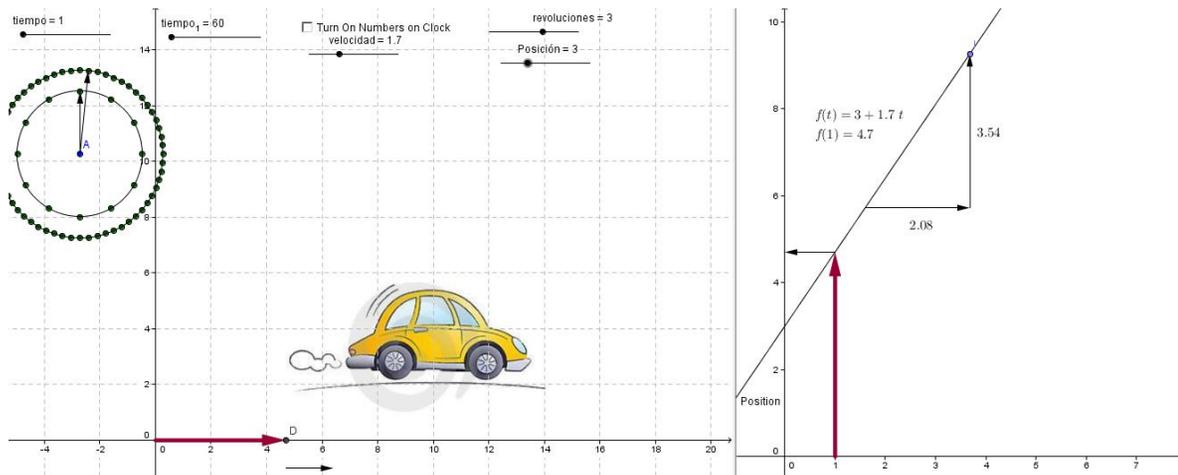
b.3) Si la velocidad ahora es de 2,3 m/s, ¿cuál es la función?

c)



Si mueve el cursor del tiempo, ¿qué sucede con el auto? ¿y la gráfica?. Interprete.

d)



Al mover el deslizador a la posición 3, ¿Qué sucede con la función?. ¿Qué significa el número 3?

Análisis a priori de la situación:

Según conocimientos disciplinarios

Al presentarse una situación que involucra un software matemático, en un principio puede resultar dificultoso el manejo del mismo, es por ello, que la pregunta A, tiene como objetivo que el estudiante se familiarice con dicha simulación, identificando los deslizadores.

Según habilidades y conocimientos en desarrollo

En la pregunta b) se espera que los estudiantes relacionen la velocidad como la razón de cambio entre la diferencia de valores de y versus la diferencia de valores de x , además que observen que es el factor que permite saber la velocidad que tiene el automóvil en un tiempo determinado.

La pregunta c) al mover el cursor tiempo se espera que los estudiantes interpreten la posición del automóvil en cada segundo, puede ocurrir que observen que es la evaluación de la función, pero que no interpreten que significa.

También puede suceder que los estudiantes escriban que es una función lineal, pero que no la interpreten.

La pregunta d) puede que los estudiantes no interpreten la función afín involucrada, al cambiar la posición del objeto.

En general los estudiantes pueden confundir que la función involucrada relaciona el tiempo con la velocidad, lo que en realidad es incorrecto, porque relaciona el tiempo con la posición del automóvil según cierta velocidad constante.

Propuesta 12: Comprensión de imágenes y pre-imágenes en situaciones de modelamiento.

Tiempo estimado: 2 horas

Objetivo: Comprenden el concepto de imagen y pre-imagen de una función en situaciones que involucra modelamiento.

Objetivo específicos Relacionan el contexto que presenta cada problema de modelación con imágenes y pre-imágenes de ella.

Actividad:

1. Resuelva los siguientes problemas, indique en qué caso se pregunta sobre la imagen o bien la pre- imagen.

a) La altura promedio, $A(x)$ en centímetros de un niño de x años de edad puede ser estimada por la función $A(x) = 6,5x + 50$.

- ¿Cuál es la altura promedio de un recién nacido?

Imagen

Pre - Imagen

- Si un niño mide 115 cm, ¿Cuántos años tiene?

Imagen

Pre - Imagen

- ¿Qué altura tiene un niño con 5 años de edad?

Imagen

Pre - Imagen

b) Las ganancias (en miles de pesos) estimadas para una empresa de cuadernos está dada por la función $G(t) = 120.000 + 2000t$, en donde t representa el tiempo medido en años a partir del 2010

- ¿Cuál serán las ganancias estimadas para el año 2013?

Imagen

Pre - Imagen

- ¿En qué año se producirá una ganancia estimada de \$13.800.000?

Imagen

Pre - Imagen

c) La función que modela el costo de poleras producidas por una fábrica es $C(p) = 100.000 + 500p$, en donde p representa cada polera.

- ¿Cuál es el costo de producir 14 poleras?

Imagen

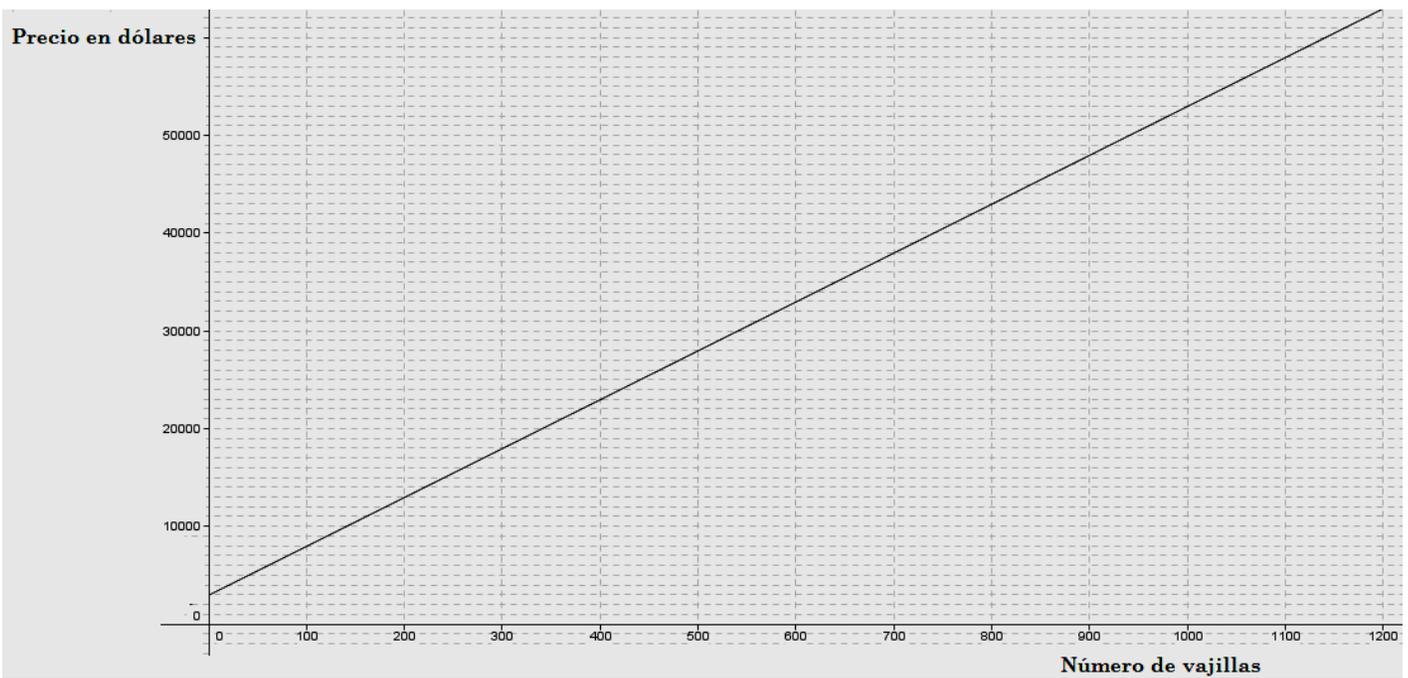
Pre - Imagen

- Si el costo de la producción de x poleras fue de \$ 110.000, ¿Cuántas poleras se produjeron?

Imagen

Pre - Imagen

- d) El siguiente gráfico representa el costo de producir x cantidad de vajillas



- ¿Cuál es el costo de no producir vajillas?

Imagen

Pre - Imagen

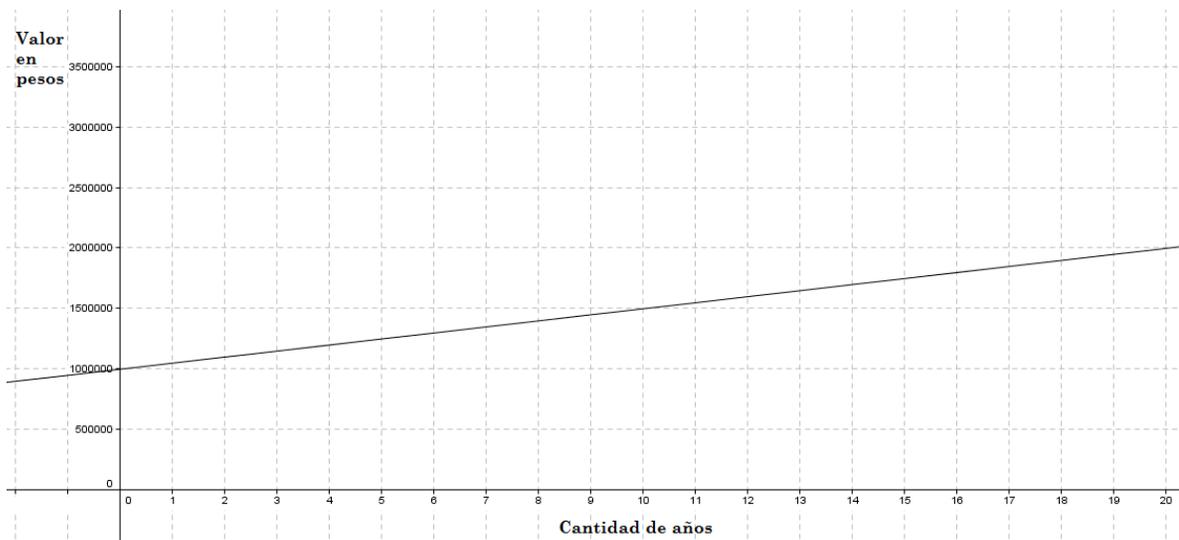
- Si se producen 500 vajillas, ¿cuál es el costo?

Imagen

Pre - Imagen

- e) Un objeto de arte adquirido en \$1.000.000 se espera que aumente su valor a una razón constante de \$50.000 por año durante los próximos 20 años.

El gráfico a continuación muestra dicha situación:



- ¿Cuál será el valor del objeto de arte a los 10 años?

Imagen

Pre - Imagen

- ¿Cuántos años han transcurrido para que la obra de arte tenga un valor de 1.250.000?

Imagen

Pre - Imagen

Análisis a priori de la situación:

Según conocimientos disciplinarios previos

El concepto de imagen y pre-imagen los estudiantes lo han trabajado en actividades anteriores, pero no con el nombre propiamente tal, es posible que asocien y hagan el proceso de reflexión escogiendo la mejor opción para la comprensión de lo preguntado.

Según habilidades y aprendizaje en desarrollo

Al presentar la pre-imagen e imagen de una función en distintos contextos de aplicación, puede ocurrir que el estudiante no lo relacione con el concepto mismo, pues generalmente se asocia pre-imagen e imagen en situaciones sin contexto de modelamiento, por tanto ahí podría existir alguna dificultad de comprensión.

La pregunta que relaciona gráficos con imágenes o pre-imágenes podría presentar dificultad no en la lectura propia del gráfico, sino que en el reconocer si la pregunta era sobre imagen o pre-imagen.

Propuesta 13: Creación de funciones en contextos conocidos (blog)

Tiempo estimado: 2 horas

Objetivo: Reflexionan sobre conceptos tales como función, dominio y recorrido.

Objetivo específico: Se presenta en un blog diferentes situaciones a los estudiantes en donde se realizan variadas preguntas relacionadas con funciones.

Situación A

Se sabe que 1 litro representa 1000 cm^3 , ¿cuál es la función que representa la conversión de centímetros cúbicos a litros?

Situación B

Se desea cercar un terreno rectangular de área 150 m^2 , el largo del terreno mide 15 m.

- ¿Cuál es la función perímetro del terreno?
- ¿Cuál es el dominio de la función?
- ¿Cuál es su recorrido?

- Se desea cercar con alambre púa el terreno, un maestro cobra \$12.000 por metro instalado, ¿cuál es la función cobro del maestro?
- Si al maestro se le ha pagado 120.000, ¿terminó de instalar y cercar todo el terreno?

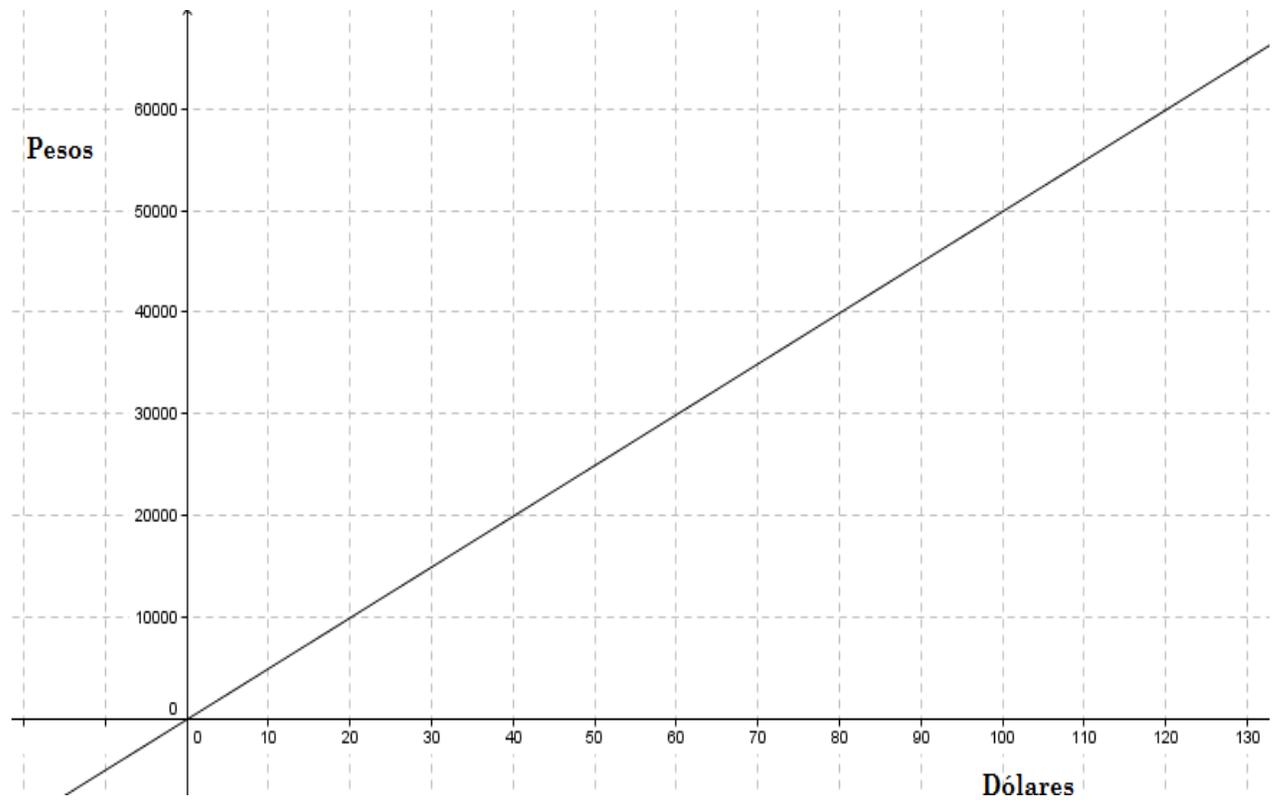
Situación C:

Un auto nuevo año 2013, tiene un valor de \$7.900.000, se estima que el auto desprecia su valor en \$750.000 por año transcurrido.

- ¿Cuál es la función que modela dicha situación?
- ¿Qué representa la pre-imagen?
- ¿Cuál es el dominio de la función?

Situación D

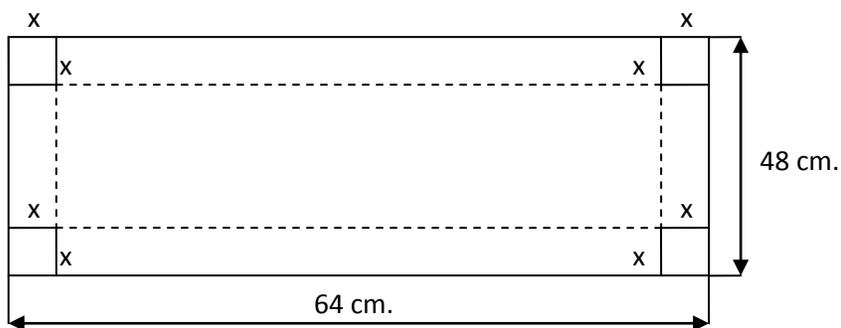
El siguiente gráfico representa el cambio de dólar a pesos



- ¿Cuál es la función que modela dicha situación?
- ¿Cuál es su recorrido?

Situación E

Una caja abierta se fabrica cortando cuadrados, de lado x cm, en cada una de las cuatro esquinas de una hoja de cartón, de 48 cm por 24 cm, luego se dobla hacia arriba cada lado cortado formando la caja.



- ¿Cuál es la función área de la caja?
- ¿Cuál es el área máxima que podría tener la caja?
- ¿Cuál es el dominio?

Análisis a priori de la situación

Según conocimientos disciplinarios

Al presentar diferentes situaciones que involucran el concepto de función en diversos contextos, puede ocurrir que en un principio el estudiante no responda adecuadamente cada una de ellas.

Según habilidades y aprendizaje en desarrollo

Las situaciones al presentarse dentro de un blog es una instancia para expresar diferentes respuestas y en el caso que éstas no sean correctas, es una instancia para que a partir del error se aprenda.

Las preguntas han sido graduadas de menor a mayor dificultad, partiendo de la conversión de unidad, puede ocurrir que en este caso los estudiantes escriban la función, pero no identifiquen la pre-imagen.

Para la actividad B, al tener una dos preguntas dentro de ella, puede confundir al alumno, se recomienda que primero se haga la pregunta de función relacionada con el cercado de terreno y según las respuestas que tengan los estudiantes, se comience con las otras preguntas del maestro, esto generará mayor dinamismo en las respuesta de los estudiantes y por tanto en su propia retroalimentación.

En la actividad C, la palabra depreciación, no es de uso común, por lo tanto puede provocar confusión, lo que no significa que no permita desarrollar la función, sino que al contrario permite ampliar conocimiento. Para la situación D, respecto al gráfico podrían escribir la función que convierte dólar a pesos, haciendo una mala lectura del gráfico, también puede suceder que para responder la pregunta necesitan observar claramente el gráfico y cómo éste se presenta por medio de una pantalla en el computador, puede suceder que no observen claramente.

Por último, en la actividad E, al no ser una función lineal o afín, puede presentar dificultad, por lo que espera el estudiante de seguir en la linealidad de funciones, sin embargo, es una actividad que tiene solo por objeto observar cómo relacionan el concepto de función, por lo tanto no debiese presentar problemas, la respuesta correcta, se puede escribir mediante su representación factorizada o bien multiplicada. Una de las formas de obtener el dominio es a través de la misma gráfica o bien por el enunciado.

Propuesta 14: Evaluación final.

Objetivo: Evaluar los contenidos relacionado con el concepto de función, enfatizando en la función lineal y afín.

Construcción del instrumento de evaluación

El instrumento de evaluación se realizará con respuesta cerrada y abierta, siendo éstas últimas en mayor porcentaje, pues se desea observar el análisis y desarrollo que realizan los estudiantes respecto al tema.

La evaluación está dividida en tres etapas. La primera de ellas se relaciona con el concepto de función y su respectiva gráfica. La segunda, es de respuesta cerrada relacionando preguntas con y sin contexto cotidiano. La tercera y última etapa, es un trabajo de modelamiento dado ciertos datos, a partir de ello se pide al estudiante que relacione las variables, discrimine y responda según lo pedido.

Evaluación final

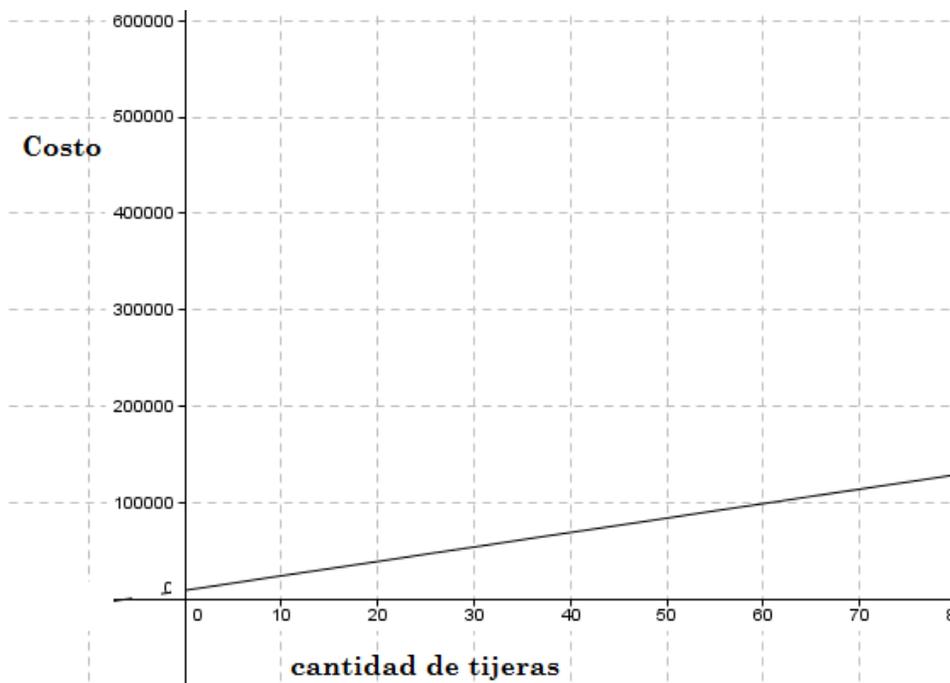
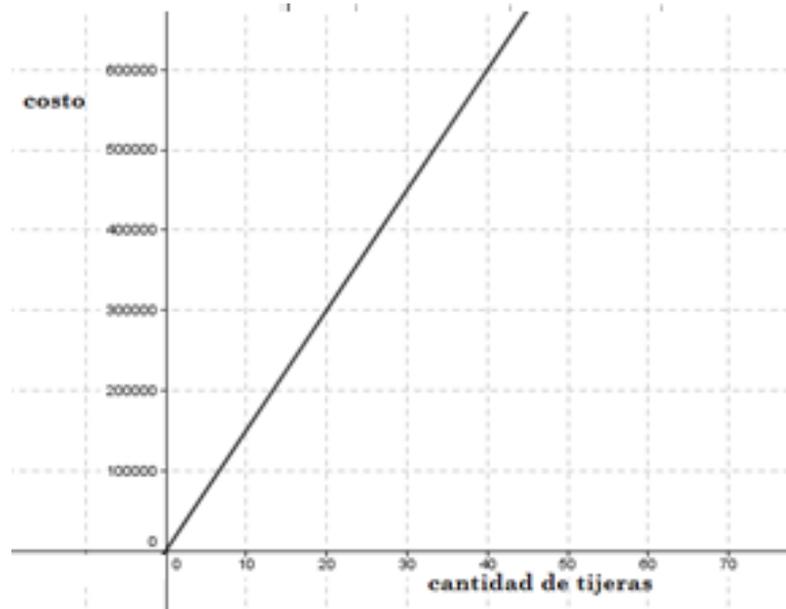
Nombre: _____ **Curso:** _____ **Fecha:** _____

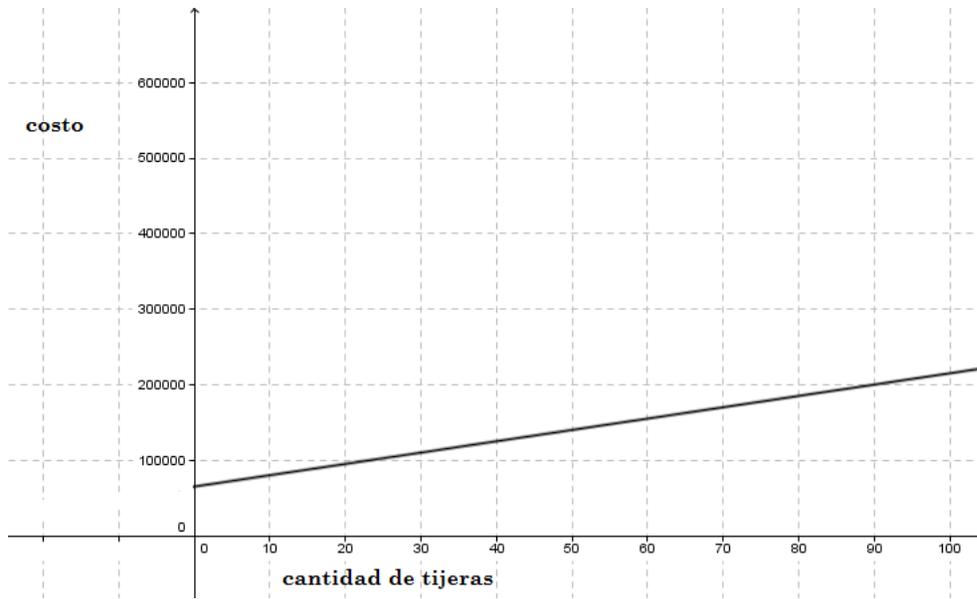
Instrucciones: Responda claramente cada pregunta, evite borrar.

1. Construya un mapa conceptual con los conceptos de función. Ejemplifique.



2. ¿Cuál es el gráfico de la función que representa la siguiente situación: "El costo de producción de tijeras para cortar el pasto de es \$1.500 más un costo fijo de \$9.000?. Justifique su respuesta.





3. Si $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = x + 3$. Grafique dichas funciones y determine su punto de intersección.



4. Selección de opciones

4.1) Sea $f: \mathbf{IR} \rightarrow \mathbf{IR}$, una función definida por $f(x) = 3x + 2$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) **verdadera(s)**?

- I) $f(-\frac{1}{3}) = 1$
 - II) La imagen de 0 es $-\frac{2}{3}$.
 - III) La preimagen de 11 es 3.
-
- A) Sólo I.
 - B) Sólo II.
 - C) Sólo III.
 - D) Sólo I y III.
 - E) I, II y III.

4.2) El cargo fijo de una cuenta por consumo de agua es de \$ 590. Si el metro cúbico de agua potable vale \$250 y, por el uso de alcantarillado se cobra \$70 por cada metro cúbico, ¿cuál fue el consumo en m^3 , sabiendo que se canceló por la cuenta \$ 6.990?

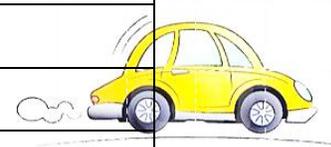
- A) 18
- B) 20
- C) 21
- D) 25
- E) 30

4.3) El conductor de un vehículo, a la entrada de un estacionamiento pregunta por la tarifa. El funcionario a cargo responde que deberá cancelar \$750 por la primera hora y, \$ 700 por cada hora siguiente o fracción. ¿Cuánto tiempo podrá permanecer el vehículo en el estacionamiento si el conductor dispone hasta \$2.000?

- A) 1 hora y 15 minutos.
- B) 1 hora y 30 minutos.
- C) 2 horas.
- D) 2 horas y 30 minutos.
- E) 3 horas.

5. Los siguientes datos representan una función que relaciona el tiempo con la distancia recorrida de un automóvil. A

Tiempo (en segundos)	Distancia (en metros)
0	2
7	2,7
20	4
33	5,3



a) Según lo anterior, responda: ¿Cuál es la función que modela dicha situación?
Explique su dominio y recorrido.

b) ¿Qué representa dicha función?

c) ¿Cuál es la posición del auto después de 1 hora?

d) Grafique dicha situación.



e) El recorrido de un automóvil B se modela mediante la siguiente función, $R(x) = 1 + 0,2x$. en donde x representa los segundos avanzados. Entonces, de acuerdo a dicha información en qué momento el automóvil A y el B han recorrido la misma distancia. Justifique.

Análisis a priori de la evaluación

Para el mapa conceptual pedido, es posible que los estudiantes no describan todos los conceptos que relaciona la función, y si eso llegase a suceder, permitirá al evaluador observar cuál es el contenido que se debe enfatizar en primera instancia.

La segunda pregunta puede suceder que consideren que todos los gráficos son correctos, de ser así sería un indicador que no interpreta bien, por tanto el estudiante no hace la relación contexto, función y gráfica.

La pregunta número tres, se espera que los estudiantes evalúen adecuadamente dichas funciones y puedan graficar las respectivas rectas, es posible que puedan tener error en la evaluación o graduación del gráfico.

El ítem cuatro, se trata de evaluar el concepto de pre-imagen e imagen de una función con o sin contexto, puede ocurrir que para el caso del contexto el estudiante lo resuelva sin escribir la función que lo representa cómo tal, pero si su comprensión mental que lo llevará de igual forma al resultado, por tanto puede aparecer en la prueba cálculos de multiplicación y suma, en el fondo el estudiante estaría evaluando las variables, sin escribir el problema explícitamente.

El ítem cinco como trata de la modelación propiamente y que el estudiante cree la función que modela dicha situación, puede ocurrir que no observe que se trata de una función afín y considere que es lineal. Al explicar la función, puede ser que no escriba la función como un operador, sino que lo escriba en lenguaje natural. Para el caso del dominio y recorrido, es posible que el estudiante no acote a los números a los reales positivos y en el caso del recorrido considerarlo a partir de los 2 metros en adelante. En la gráfica de la función es muy probable que el estudiante no identifique los ejes. Para la pregunta e) la justificación matemática se puede dar mediante evaluación de ambas funciones, o por la gráfica de ambas y observar el punto de intersección, o igualando ambas funciones

resolviéndolo de esta forma de manera algebraica, en los tres casos su resolución sería correcta. Una respuesta errónea, sería como tienen distinta velocidad nunca se encontrarán

CONCLUSIONES

El concepto de función en las distintas etapas de la vida escolar va adquiriendo cada vez más preponderancia, ya que es por medio de él que podemos modelar diferentes situaciones de la vida real.

Cuando se enseña el concepto de función y por ende el aprendizaje que debería generar éste, podemos tener diferentes situaciones, una de ellas es que el estudiante caiga en un algoritmo, reconociendo lo que está frente de él, pero sin poder interpretar lo que quiere decir el problema (cómo lo mostró el test aplicado). Es decir, el estudiante comprende, pero no es capaz de analizar o interpretar la situación, por tanto mayoritariamente, no existe un proceso de reflexión ante el tema que lo lleve a cuestionarse que significa la situación que se le está presentando.

A su vez, podríamos tener la situación en donde el estudiante comprenda y analice lo que está ante él, y por tanto lleguemos a un proceso de reflexión, de saber por qué se hace y lo más importante aún, es que fue lo que se hizo para llegar a ello.

Tener presentes las diferentes representaciones de funciones y no verlas como un algoritmo conectado con una fórmula, permite relacionar su concepto y hacer una mayor comprensión del mismo.

Mostrar diferentes funciones en su representación gráfica, aun cuando no se les ha presentado formalmente, enriquece el conocimiento en cuanto a las conexiones que puede ir realizando el estudiante, por medio de la reflexión de sus conocimientos, además de considerar que en el fondo se trata del mismo concepto sólo que se está escribiendo o graficando de otra manera, incluso cuando se aplica a problemas de modelamiento asociados a física o el área de un rectángulo.

Entonces, para poder llegar a esta última situación tal como lo plantean varios autores como lo son Borromeo, Blum/Leiss, María Aravena D. y Carlos Caamaño, o también el mismo Ministerio de Educación de Chile, es importante que dentro de nuestras aulas incorporemos el modelamiento como parte esencial de las matemáticas, ya que este nos propone partir de situaciones reales a las abstractas, no haciendo el proceso inverso y mostrándose entonces, como una vía para lograr un aprendizaje que nos lleve a la reflexión.

Pero, ¿cómo realizar el modelamiento? Y más aún ¿Cómo realizar el modelamiento del concepto de función?, en la propuesta metodológica que se realizó (basada en que se en el ciclo de modelamiento Blumm/Leiss y situación didáctica de GuyBrosseau) se parte primeramente desde el mundo real, para luego ir planteando distintas acciones que tienen que ver directamente con las fases que tiene el alumno, pero siempre considerando que no son en vertical dichas fases, al contrario, es un ciclo, que me puede permitir volver y validar lo descrito.

Esto tiene como objetivo final llegar a un conocimiento construido de funciones y por tanto a su respectiva reflexión.

Entonces, ¿por qué la reflexión?, al pensar en el aprendizaje, es decir, cuando algo nuevo está aprendiendo el estudiante, éste recuerda conocimiento previos, y piezas que se relacionan con el conocimiento nuevo, distinguir cuál de ellas son las que me permiten hacer las conexiones necesarias, y por lo tanto, tomar las más fundamentales que me conduzcan a una buena decisión matemática, es parte de lo que nos brinda la reflexión; además ésta permite a los estudiantes observar su propio proceso de aprendizaje, poder evaluar sus conocimientos, descubrir el camino adecuado.

Por otro lado, proporciona al profesor información de cada estudiante y el proceso que está llevando a cabo, en qué nivel de aprendizaje se encuentra, qué tan profundo ha logrado su conocimiento. También con esto último es posible observar las dificultades que

se pueden presentar en el aprendizaje de funciones y las reflexiones que no se están dando dentro de éste proceso.

Es por ello, que al crear situaciones de aprendizaje se propone enfocarlo de diferentes aristas, basadas en el modelamiento, para que de ese modo, el estudiante logre hacer procesos de cuestionamientos, de análisis de la situaciones y el decantamiento necesario que lo lleve a la reflexión de su aprendizaje y su acción en él.

Si logramos introducir dentro de nuestras salas de clases conceptos como modelamiento y reflexión como parte del proceso de aprendizaje en nuestros alumnos, probablemente tendremos estudiantes que comprendan mejor la matemática y derivado de esta el concepto de función.

BIBLIOGRAFÍA

América economía (2012). Uso de la bicicleta, Revisado el 4 de noviembre de 2013 recuperado de <http://www.americaeconomia.com/politica-sociedad/politica/chile-uso-de-bicicleta-aumenta-20-al-ano-en-santiago>

Aravena, M. y Caamaño, C. (2007) Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile. *Estudios pedagógicos* XXXIII(2): 7-25.

Betne, P. (2013). Reflection as a Learning Tool in Mathematics, pp 93- 101, Revisado el 4 de noviembre de 2013 recuperado de http://ctl.laguardia.edu/journal/v4/pdf/InTransit_Fall09_v4_betne.pdf

Borromeo, R.(2009) Mathematical Modelling: Can it Be Taught And Learnt? Werner Blum, Rita Borromeo. *Journal of mathematical Modelling and Application* 1(1): 45- 58

Borromeo, R. (2006) Theroretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *ZDM*, 38(2):85- 89.

Chavarría, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. Cuaderno de investigación y formación en educación matemática Universidad Nacional, escuela de Matemática. 1(2):5. Revisado el 4 de noviembre de 2013 recuperado de <http://cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno2/Cuadernos%202%20c%203.pdf>

Colegio de nutricionista A.G. (2013). Índice de masa corporal, Revisado el 4 de noviembre 2013, recuperado de <http://www.nutricionistasdechile.cl/imc.html>

Collect GFK, Elige Vivir Sano, Fundación Chile, Fundación De La Familia. (2012). Chile saludable, oportunidades y desafíos de innovación, p 11. revisado el 7 de noviembre de 2013 recuperado de: <http://www.eligevivirsano.cl/wp-content/uploads/2013/01/ESTUDIO-CHILE-SALUDABLE-VOLUMEN-I.pdf>

Dubinsky, E (1991).The constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics En L. P Steffe (ed), Epistemological Foundations of mathematical. New York: Springer- Verlag.

Euler (1748) Introduccion a l´analyseinfinitesimale, Revisado el 6 de noviembre 2013 recuperado de <http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/2-1-3-euler.pdf>

Félix, Lysette (2009). Análisis del parámetro como variable en la transformación de funciones: un estudio con alumnos universitarios Tesis que para obtener el grado de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa. México: Instituto Politécnico Nacional, Centro De Investigación En Ciencia Aplicada Y Tecnología Avanzada.

Gallardo, Jesús. (2004). Diagnostico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. Tesis doctoral. Universidad de Málaga, España.Revisado el 7 de noviembre de 2013 recuperado de:<http://funes.uniandes.edu.co/625/2/Gallardo2004Diagnostico.pdf>

In Time.Integrating new technologies.(1991-2001). Reflection. Revisado el 7 de noviembre 2013,recuperado de: <http://www.intime.uni.edu/model/learning/refl.html>

Kenneth M. Zeichner, El maestro como profesional reflexivo. Wisconsin, Madison, EE.UU, Revisado el 4 de noviembre de 2013, recuperado de <http://www.practicareflexiva.pro/wp-content/uploads/Org-El-maestro-como-profesional-reflexivo-de-Kenneth-M.-Zeichner..pdf>

Language and learning on line (2013).Therreflectivelearningprocess. Revisado el 4 de noviembre de 2013 recuperado de <http://www.monash.edu.au/lls/l/online/writing/medicine/reflective/3.xml>

Geogebra. Software descargable sobre auto y velocidad, Revisado el 4 de noviembre año 2013, recuperado de: <http://www.geogebra.org/material/show/id/15481>

Mena, Arturo (2010). Acerca de la importancia de la Didáctica de la Matemática para nuestro país, Lorca, Coloquio de Didáctica de la Matemática. Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Ministerio de Educación Chile (2013). Programa de matemática 6° Básico. Santiago: Ministerio de Educación República de Chile

Ministerio de Educación de Chile (2011). Plan y programa de Matemática, Segundo Año Medio 2011. Santiago: Ministerio de Educación República de Chile

Ong, Rachel. (2013). Role of reflection in student learning, Centre for Educational Development Republic Polytechnic Kay Siang Road, Singapore 248922
Revisado el 4 de noviembre 2013 recuperado de
http://www.myrp.sg/ced/research/papers/role_of_reflection_in_student_learning.pdf

Profesor en línea, Población de animales. Revisado el 4 de Noviembre 2013, recuperado de
http://www.profesorenlinea.cl/ecologiaambiente/Poblacion_y_Comunidad.html

Ramos, E. (2011). Reflexión de docentes sobre la enseñanza del álgebra en un programa formativo. Tesis para optar al título de Master en Didáctica de las Matemáticas [no publicada]. Granada, España: Universidad de Granada.

Trigueros, M. (2005). Educación Matemática, Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal, 17(1)5 -31.

Vernaud, G. (1981). L'enfant, la mathématique et la réalité, Berne, Peter Lang., Université René Descartes. y CNRS Francia.

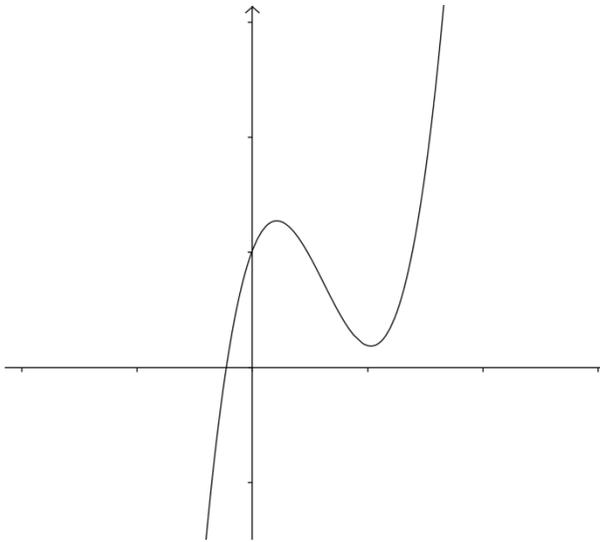
Anexo 1

- Test de evaluación

1. El aumento de sueldo de una persona varía según los años trabajado en cierta institución. De acuerdo a ella determine ¿Cuál es la relación que involucra esta situación?

A1

2. De acuerdo a la siguiente gráfica ¿Es cierto que a medida que aumenta la variable x aumenta el valor de y? **A4**



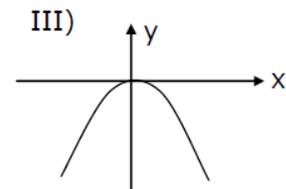
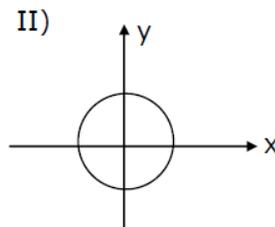
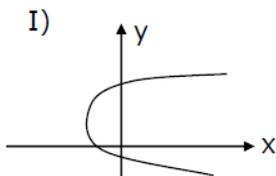
3. La siguiente tabla muestra la cantidad de kilocalorías presentes en una bebida gaseosa light **A2**

<i>Kilocalorías</i>	0,2	0,4	0,6	0,8
<i>Ml</i>	100			

4. Complete la tabla para $f(x) = 2x + 5$ **A2**

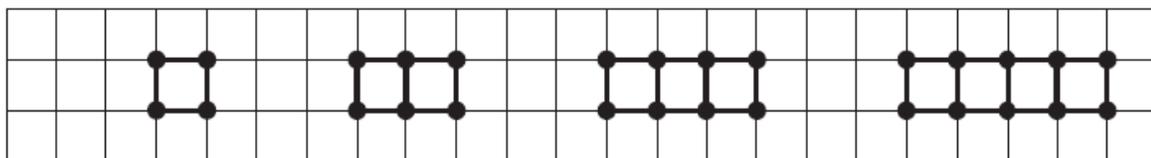
<i>X</i>	-3	0	3
<i>f(x)</i>			11

5. En las siguientes situaciones complete según corresponda: **A1**
- A medida que aumenta el lado de un cuadrado entonces su perímetro_____
 - Si el radio de una circunferencia va disminuyendo entonces su área_____
6. El precio de un producto x es \$1350. Si Juan se pagó \$10.800 ¿Cuántos productos compró? **A3**
7. Si $f(x) = 2\sqrt{x}$ y $f(x) = 10$ entonces ¿cuál es el valor de x ? **A3**
8. Realice un bosquejo de la gráfica de la función $f(x) = ax + 1$? considerando que a es distinto de cero. **A4**
9. ¿Cuál es el dominio de la siguiente función $f(x) = \frac{1}{x-3}$? **A5**
10. La fábrica de lapiceras “ESCRIBO” tiene un costo fijo de arriendo de las instalaciones en las que funciona, que asciende a los \$2.000.000. El costo de fabricar una lapicera es de \$400, y el precio de venta es de \$600. Si x representa el número de lapiceras vendidas. ¿Cuál es el dominio de esta situación? **A5**
11. De las gráficas siguientes ¿cuál(es) de ellas pertenece(n) a una función cuadrática? **A8**



12. El consumo de agua potable según el gasto que esta proporciona ¿Que tipo de relación representa? **A8**

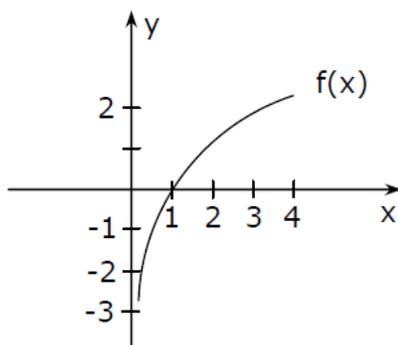
13. Observando la secuencia de puntos y cuadrados responde: **A7**



Número de puntos	4	6	8	10
Número de cuadrados	1	2	3	4

Encuentra el número de lados con:

a) 5



cuadrados _____

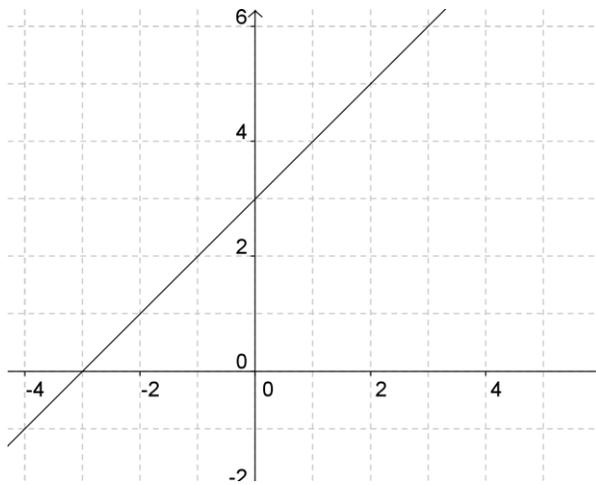
b) 9 cuadrados _____

c) n cuadrados _____

14. En una cierta ciudad se puede arrendar un automóvil pagando \$ 1. 000 más \$ 75 por kilómetro recorrido. ¿Cuál es la función que permite calcular el costo, en pesos, de arrendar un auto por un día, si se recorren x kilómetros? **A7**

15. De acuerdo a la siguiente gráfica, ¿Qué función representa? **A6**

16. En la siguiente gráfica ¿Cuál es la función que representa? **A6**



Anexo 2

Creación de un blog:

Es una plataforma gratuita que permite crear anuncios que pueden contener imágenes o caracteres (escritura) por la cual se puede interactuar mediante mensaje de feedback. Por medio de esta plataforma es posible crear foros, debates, conversaciones y tener la retroalimentación virtual, previo a una identificación de la persona.

1. Crear una cuenta de gmail

2. Acceder a Blogger

www.blogger.com

3. Después hacer click en crear tu blog ahora



Anexo 3

Creación de dropbox

Dropbox es una plataforma gratuita que permite tener archivos en una nube virtual, los cuáles se pueden compartir con las personas que desee mediante un link que se envía al correo de cada una de ellas.

1. Ingrese a www.dropbox.com
2. Registrarse mediante una cuenta de mail



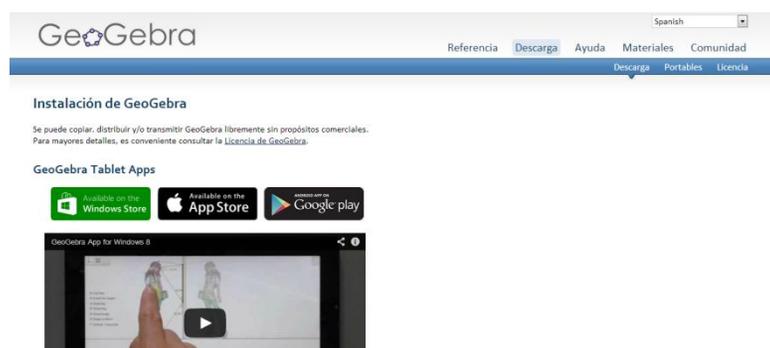
3. Instalarlo y ¡listo!

Anexo 4

Geogebra

Es un software gratuito de matemática, que se puede bajar de la página web www.geogebra.org. Permite realizar gráfica de funciones, aplicar a geometría, incluso con temas relacionados a probabilidad.

1. Ingresar a www.geogebra.org
2. Descarga el software según su sistema operativo



Para la actividad del modelamiento que incluye un auto puede descargarlo directamente de la siguiente página: <http://www.geogebra.org/material/show/id/15481>

Anexo 5

_____ de 201_

Pauta de evaluación: Trabajo de investigación matemática

Nombre:	Puntaje Obtenido: /
---------	---------------------

criterio	Desempeño Específico	0	1	2	3	4
Presentación formal del documento. (18 puntos)	Entrega el documento en una carpeta limpia.	No entrega el documento en una carpeta limpia.	Entrega el documento en una carpeta limpia, pero sin anillar o corchetear las hojas.	Entrega el documento en una carpeta limpia, anilladas o corcheteadas las hojas.		
	Utiliza fuente verdana 10	Utiliza otra fuente, ya sea en tamaño o en su tipo.	Utiliza la fuente adecuada.			
	Cumple con las características en la hoja. (interlineado 1,5, márgenes 2cm, hoja tamaño carta)	No respeta las características dadas para el documento.	No respeta al menos una de las características dadas para el documento.	Respeto todas las características dadas para el documento.		
	Respeto el número de hojas. (Min: 5 hojas, Máx: 10 hojas) Sin incluir la hoja de portada y bibliografía.	Utiliza menos de 5 hojas o más de 10 para escribir el documento.	El número de hojas es el adecuado.			
	Gráficas o fotografías que no supere el 6 cm de largo por 6 cm de ancho (Min: 3 , Máx: 7)	No respeta las instrucciones dadas para las gráficas o fotografías	No respeta el número tamaño de las fotografías o gráficas. Tampoco el número de ellas.	Respeto el tamaño y número de gráficas o fotografías.		

	Cumple con la estructura del documento. (Índice, introducción, contenido, conclusiones)	El trabajo presenta sólo contenido.	El trabajo no presenta algunas de las partes de su estructura.	El documento se presenta ordenado con las siguientes partes: índice, introducción, contenido, conclusiones.		
	Número de Fuentes de información utilizada.	Presenta menos de tres fuentes de información distintas	Presenta desde tres tipos de fuentes de información distintas.			
	Cita las Fuentes de información.	No cita las fuentes de información.	No cita la mayoría de las veces las fuentes de información.	Cita la mayoría de las veces.	Cita todas las fuentes de información que utilizó, indicando a qué se refiere.	
	Anexos	No presenta anexos	Presenta anexos, datos obtenidos, informaciones varias			
Introducción (4 puntos)	Describe el objetivo de la investigación que realizará, además de los alcances y los límites para ello.	No presenta introducción o la que presenta no describe el objetivo.	Presenta una introducción donde se describen los objetivos, pero no reflexiona sobre ellos.	Describe el objetivo de la investigación que se realizará, además de los alcances y los límites para ello.		
Desarrollo del contenido a investigar (36 puntos)	Investigación					
	Planteamiento del problema a investigar	No describe el planteamiento del problema a investigar	Describe el planteamiento del problema a investigar de forma confusa, no dando ejemplos que lo justifican.	Describe claramente el planteamiento del problema a investigar, dando ejemplos que lo justifican.		
	Descripción del entorno y situación a investigar	No describe el entorno de la situación a investigar	Describe de manera confusa el entorno a investigar	Describe claramente el entorno de la situación a investigar		

	Concepto de función en la situación.	No especifica el concepto de función involucrado.	Especifica el concepto de función involucrado, pero no fundamenta porqué.	Especifica el concepto de función involucrado, pero fundamenta ambiguamente.	Especifica el concepto de función involucrado, fundamentando matemáticamente porque corresponde.	
	Registro de los datos para modelar	No presenta el registro de los datos	Presenta el registro de los datos que modela la función, de forma desordenada.	Presenta el registro de los datos que modela la función en un tabla o similar, pero no especifica a qué corresponde cada dato.	Presenta el registro de los datos que modela la función en una tabla o similar, especificando a qué corresponde cada dato.	
	Función que modela la situación	No escribe la función que modela la situación	Escribe la función que modela la situación, pero no fundamenta matemáticamente con los datos y cálculos realizados para llegar a dicha función y además es errada	.Escribe la función que modela la situación, pero no fundamenta matemáticamente con los datos y cálculos realizados para llegar a dicha función	Escribe la función que modela la situación, fundamenta matemáticamente con los datos y cálculos realizados para llegar a dicha función, pero es errada la función.	Escribe la función que modela la situación, fundamenta matemáticamente con los datos y cálculos realizados para llegar a dicha función, y es correcta.

	Gráfico de que modela dicha situación.	No realiza el gráfico de la situación que modela	Realiza el gráfico de la función que modela, pero no se relaciona con la misma	Realiza el gráfico de la función que modela, se relaciona con la misma, sin embargo, no identifica ejes.	Realiza el gráfico de la función que modela, se relaciona con la misma, sin embargo, identifica ejes	Realiza el gráfico de la función que modela, se relaciona con la misma, sin embargo, identifica ejes y además escribe una reseña relacionada con el gráfico.
Conclusión (4 puntos)	Realiza inferencias y contraste entre los objetivos planteados y los resultados de la investigación realizada.	No presenta Conclusión o bien ella no resulta una inferencia de lo investigado.	Presenta una conclusión confusa que no se relaciona con los objetivos propuestos o bien con lo que investigó.	Presenta una conclusión que se relaciona con los objetivos propuestos, realizando reflexión sobre ello, pero no lo relaciona con la función encontrada.	Presenta una conclusión que se relaciona con los objetivos propuestos, realizando reflexión sobre ello y haciendo una inferencia con la función encontrada.	